TD 7 : Électrostatique

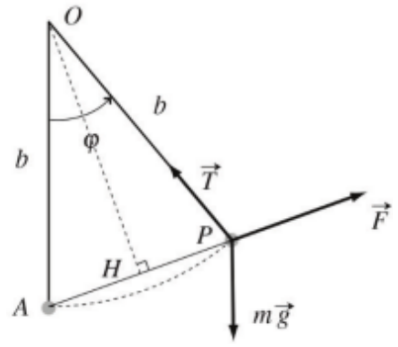
Exercice 1: Lecture d'une carte de champ (⋆)

1. Le champ diverge depuis les charges positives et convergent vers les charges négatives, donc
$$q_1 > 0 \quad ; \quad q_2 > 0 \quad ; \quad q_3 < 0 \quad ; \quad q_4 > 0 \quad ; \quad q_5 > 0$$
2. Le plan Oyz est un plan de symétrie de $\vec{E}$. C'est aussi un plan de symétrie de la distribution de charges, donc $\boxed{q_4 = q_2 \text{ et } q_5 = q_1}$.

   Le plan Oxz est un plan de symétrie de $\vec{E}$, donc il s'agit aussi un plan de symétrie de la distribution de charges. Cependant il n'apporte pas d'information sur q_i car il contient les charges.
3. Il existe des lignes de champ qui se croisent au niveau de S, ce qui n'est possible que parce que le champ électrostatique y est nul. Le cas échéant, le champ électrostatique est tangent aux lignes de champ.La seule possibilité pour que le champ soit tangent à deux lignes au point de croisement est qu'il soit nul.

   Par application du théorème de Gauss, le flux à travers la surface fermée S vaut $Q_{\text{int}}/\epsilon_0$. Comme $\vec{E}(M) = \vec{0}$ en tout point M de S, le flux est nul, donc
$$Q_{\text{int}} = 0 \quad \text{soit} \quad q_2 + q_3 + q_4 = 0$$
   Comme $q_4 = q_2$, on en déduit $\boxed{q_3 = -2q_2 < 0}$.

Exercice 2: Electromètre (⋆⋆)

1.


   Chaque sphère porte la charge $Q/2$. La force électrostatique qui s'exerce sur P est donc :
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2/4}{AP^2}\vec{u}_{AP}$$
   Pour calculer sa norme, on développe :
$$AP^2 = AO^2 + OP^2 + 2AO \cdot OP = 2b^2 - 2b^2\cos\varphi = 4b^2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
   donc
$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{16b^2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}$$
   Elle est dirigée de A vers P, c'est une force répulsive.
2. Le point P étant en rotation autour de l'axe fixe Δ, horizontal et passant par O, on étudie son mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique par rapport à Δ. Le point est soumis à la force électrostatique, à son poids et à la tension du fil. À l'équilibre la somme des moments par rapport à l'axe Δ des forces s'exerçant sur le point P est nulle.
   — La droite d'action de la tension passe par O donc son moment par rapport à Δ est nul.
   — Le poids a tendance à faire diminuer l'angle φ et le bras de levier est $b\sin\varphi$, le moment du poids par rapport à Δ est :
$$\mathcal{M}_\Delta(\text{poids}) = -mgb\sin\varphi$$
   — La force électrostatique a tendance à faire augmenter l'angle φ et le bras de levier est $OH = b\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, le moment de la force électrostatique par rapport à Δ est :
$$\mathcal{M}_\Delta(F) = +Fb\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
   À l'équilibre :
$$mgb\sin\varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2\cos\left(\frac{\varphi_e}{2}\right)}{16b\sin^2\left(\frac{\varphi_e}{2}\right)}$$
   En utilisant la formule $\sin\varphi = 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, on obtient :
$$\boxed{\sin^3\frac{\varphi_e}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{32mgb^2}}$$
3. Si on connaît φ_e, on peut déterminer Q d'après la relation précédente.
4.
$$Q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \times 32mgb^2\sin^3\frac{\varphi_e}{2}}$$
   L'application numérique donne : $Q = 4{,}00 \times 10^{-7}$ C.

5. L'énergie potentielle de pesanteur du point P est :

$$\mathscr{E}_p(\text{pesanteur}) = -mgb\cos\varphi + \text{cste}$$

L'énergie d'interaction électrostatique entre les deux charges est :

$$\mathscr{E}_p(\text{élec}) = \frac{Q}{2}V_A(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{8b\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Au total :

$$\boxed{\mathscr{E}_p = -mgb\cos\varphi + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{8b\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}$$

6. Les positions d'équilibre éventuelles correspondent à des extrema de l'énergie potentielle. La courbe nous montre qu'il existe un minimum entre 0 et $\pi/2$, c'est donc une position d'équilibre stable. On détermine la valeur de l'angle en résolvant l'équation $\mathcal{E}_p'(\varphi_e) = 0$, c'est-à-dire :

$$mgb\sin\varphi = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \times 8b}\frac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

ce qui donne bien la même expression que précédemment (on dit d'ailleurs sur la courbe une valeur proche de 1, c'est-à-dire proche de $\pi/3$).

Exercice 3: Recherche d'une distribution de charges (⋆⋆)

1. Une exponentielle, ainsi que son argument, sont des grandeurs sans dimension. a est donc une longueur.
On sait par ailleurs que

$$\frac{\text{charge}}{\epsilon_0 \times \text{distance}}$$

est homogène à un potentiel. Q est donc une charge électrique.

2. $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$; en coordonnées sphériques, on en déduit $E(r) = E(r)\,\vec{e}_r$, avec :

$$\boxed{E(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)e^{-\frac{r}{a}}}.$$

3. Le flux de $\vec{E}$ à travers la sphère de rayon r est donc :

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}\left(1 + \frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{a}}.$$

D'après le théorème de Gauss, $Q(r) = \epsilon_0\Phi(r)$, si $Q(r)$ est la charge contenue dans la sphère de rayon r.
On en déduit

$$\boxed{Q(r) = Q\left(1 + \frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{a}}.}$$

— $Q(0) = Q$: il y a donc une charge ponctuelle Q à l'origine des coordonnées.
— $Q \to 0$ pour $r \to \infty$: la charge totale est donc nulle.
— Chaque pellicule sphérique d'épaisseur dr a une charge $\mathrm{d}Q = \rho(r)4\pi r^2\mathrm{d}r$, si $\rho(r)$ est la densité volumique de charge. On peut donc calculer $\rho(r)$ pour $r > 0$:

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}; \quad \text{soit} \quad \boxed{\rho(r) = -\frac{Q}{4\pi a^2 r}e^{-\frac{r}{a}}}.$$

Exercice 4: Un fil et un cylindre (⋆)

1. On travaille en coordonnées cylindriques donc $D = D(r,\theta,z)$. La distribution est invariante par rotation autour de (Oz) et translation le long de (Oz). On a donc une distribution $D = D(r)$. On en déduit que le champ $\vec{E} = \vec{E}(r)$.
Au niveau des symétries, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie ainsi que le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ donc le champ $\vec{E}$ est contenu dans ces plans donc

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$$

On applique le théorème de Gauss à la surface fermée $\mathcal{S}$ constituée d'un cylindre d'axe (Oz), de rayon r et de hauteur quelconque h :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = E(r) \times 2\pi r h$$

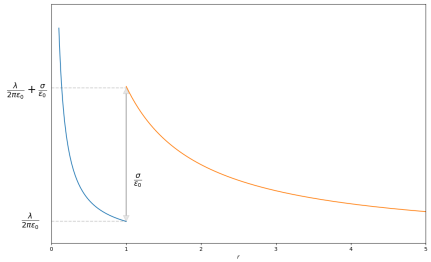
— Si $0 \leq r \leq R$: $Q_{int} = \lambda h$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{e}_r}$$

— Si $r \geq R$: $Q_{int} = \lambda h + \sigma \times 2\pi R h$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\right) + \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}\vec{e}_r}$$

Remarque : on aurait également pu utiliser le principe de superposition et étudier séparément le fil et le cylindre puis ajouter leur champs.



2.

3. Le champ électrique est discontinu à cause de la distribution surfacique du cylindre.

Exercice 5: Énergie de formation (⋆⋆)

1.

$$\mathcal{E} = Q^\alpha R^\beta \epsilon_0^\gamma$$

or

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

donc dimensionnellement :

$$[\epsilon_0] = A^2 T^4 M^{-1} L^{-3}$$

$$M.L^2.T^{-2} = (A.T)^\alpha \times L^\beta \times (A^2T^4M^{-1}L^{-3})^\gamma$$

On a donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 4\gamma = -2 \\ \beta - 3\gamma = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

soit $\alpha = 2$, $\beta = -1$ et $\gamma = -1$.

$$\boxed{\mathcal{E} = k\frac{Q^2}{R\epsilon_0}}$$

avec k une constante adimensionnée.

2. La sphère déjà construite possède une charge $q(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ avec $\rho = Q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$. Pour augmenter de d$r$ le rayon de la sphère, il faut amener de l'infini une charge $\delta q = \rho \times 4\pi r^2 \mathrm{d}r$.

La force que doit exercer l'opérateur $\delta\vec{F}_{\text{op}}$ est l'opposée de la force électrique exercée par la sphère chargée $q(r)$. Ainsi

$$\delta W = \delta W(\delta\vec{F}_{\text{op}} = -\delta W(\delta\vec{F}_{\text{elec}}) = \Delta E_p$$

avec $\Delta E_p = E_p(r) - E_p(r \to +\infty)$ la variation d'énertie potentielle électrique de la charge élémentaire δq. Comme

$$E_p(r) = \delta q\, V(r) \quad \text{avec} \quad V(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0},$$

on en déduit

$$\delta W = \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\epsilon_0}\mathrm{d}r$$

On a $\delta W > 0$ car l'opérateur doit fournir du travail pour vaincre l'interaction coulombienne.

3.

$$\mathcal{E} = \int_0^R \delta W = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\epsilon_0} dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

On en déduit

$$\boxed{k = \frac{3}{20\pi}}$$

4. La charge du noyau est $Q = Ze$. Son rayon R vérifie $\frac{4}{3}\pi R^3 = A_{\text{Co}} \times \frac{4}{3}\pi R_0^3$ soit $R = R_0 A_{\text{Co}}^{1/3}$. On trouve

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0}\frac{(Ze)^2}{5R_0 A_{\text{Co}}^{1/3}}}$$

AN : $\boxed{\mathcal{E} = 1{,}2 \times 10^2\,\text{MeV}}$.
Cette énergie étant positive, les particules séparées sont plus stables que regroupées, ce qui est en contradiction avec la stabilité du noyau. L'interaction électrostatique ne peut donc expliquer seule la formation des noyaux. Il faut faire intervenir une nouvelle force : l'interaction forte.

Exercice 6: Charge en surface d'un semi-conducteur (⋆⋆)

1. Tout plan contenant l'axe (Mx) est un plan de symétrie de la distribution de charges, donc le champ électrique $\vec{E}(M)$ appartient à ces plans. On en déduit $\boxed{\vec{u} = \vec{e}_x}$.

2. Pour $x < 0$, il n'y a pas de charges, donc $\rho(x < 0) = 0$.
Pour $x > 0$, on applique le théorème de Gauss sur une surface fermée Σ constituée par un cylindre de section S entre x et $x_1 \to +\infty$.
On exprime le flux :

$$\oiint_{M\in\Sigma} \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = S(E(x_1) - E(x)) = E_0 S \left(\exp\left(-x_1/\ell\right) - \exp\left(-x/\ell\right)\right)$$

On exprime la charge intérieure

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{P\in V_S} \rho(P)\mathrm{d}V = S\int_x^{x_1} \rho(u)\mathrm{d}u$$

D'après le théorème de Gauss,

$$E_0 S \left(\exp\left(-x_1/\ell\right) - \exp\left(-x/\ell\right)\right) = \frac{S}{\epsilon_0}\int_x^{x_1} \rho(u)\mathrm{d}u$$

Dérivons cette expression par rapport à x :

$$\frac{E_0 S}{\ell}\exp\left(-x/\ell\right) = -\frac{S}{\epsilon_0}\rho(x) \quad \text{avec} \quad \rho(x\to+\infty) = 0 \quad \text{et} \quad E(x\to+\infty) = 0$$

On en déduit

$$\boxed{\rho(x > 0) = -\frac{E_0\epsilon_0}{\ell}\exp\left(-x/\ell\right)}$$

On peut vérifier l'homogénéité car $[E] \times L^2 = [Q]/[\epsilon_0]$ et $[\rho] = [Q]L^{-3}$, donc

$$[\rho] = \frac{[E]\times[\epsilon_0]}{L}$$

C'est cohérent avec l'expression obtenue.
Remarque : On aurait pu utiliser l'équation locale $\mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ que l'on peut établir à partir du théorème de Green Ostrogradski

3. Pour $x > 0$, le milieu est globalement neutre. On exprime la charge dans un cylindre de section S compris entre $x = 0$ et $x \to +\infty$:

$$\sigma_0 S + S\int_0^{+\infty} \rho(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{soit} \quad \sigma_0 = \frac{E_0\epsilon_0}{\ell}\int_0^{+\infty} \exp\left(-x/\ell\right)\mathrm{d}x$$

On en déduit $\boxed{\sigma_0 = E_0\epsilon_0}$.

4. En électrostatique, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$, soit

$$\begin{cases} V(x < 0) = A \\ V(x > 0) = E_0\ell\exp(-x/\ell) + B \end{cases}$$

On prend l'origine du potentiel en $x \to +\infty$, donc $B = 0$.
Par continuité du potentiel en $x = 0$, on en déduit $A = E_0\ell$.
D'où $\boxed{V(x = 0) = E_0\ell}$.

Exercice 7: Effet de pointe ($\star$)

1. On utilise le théorème de Gauss pour calculer le champ $\vec{E}(M)$.
On travaille en coordonnées sphériques. On a invariance par rotation autour de O donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(r,\theta,\varphi) = \vec{E}(r)$.
De plus, tout plan passant par O et M est plan de symétrie des charges donc $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection de ces plans donc $\vec{E}$ est radial :

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r}$$

On choisit comme surface de Gauss une sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon $r = OM$.
D'après le théorème de Gauss :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

— si $r > R$: $Q_{int} = \sigma 4\pi R^2$ soit $\vec{E}(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$
— si $r < R$: $Q_{int} = 0$ soit $\vec{E}(r) = \vec{0}$

2. $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$ donc
— si $r \geq R$: $V(r \geq R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$
— si $r \leq R$: $V(r \leq R) = C^{te}$
Par continuité du potentiel en $r = R$: $V(r \leq R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$. Finalement
— si $r \geq R$: $V(r \geq R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$
— si $r \leq R$: $V(r \leq R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$

3. Au voisinage de R^+, $V(R^+) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$ et $E(R^+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ donc

$$\boxed{E(R^+) = \frac{V(R^+)}{R}}$$

Pour un même potentiel V imposé à la sphère, le champ E à son voisinnage proche est d'autant plus intense que R est petit. C'est ce que l'on appelle le pouvoir des pointes, caractérisées par de très petits rayons de courbure.

Exercice 8: Champ dans une cavité cylindrique (⋆⋆)

1. La distribution D est la superposition de la distribution D_1 et de la distribution D_2.
Distribution D : Cylindre infini de densité volumique de charges ρ avec une cavité cylindrique infinie.



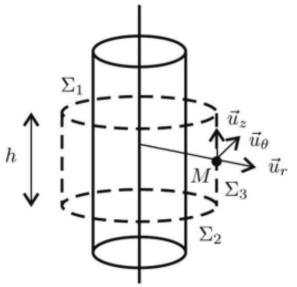
Distribution D_1 : Cylindre illimité d'axe O_1z de rayon R_1 de densité volumique de charges ρ.



Distribution D_2 : Cylindre illimité d'axe O_2z de rayon R_2 de densité volumique de charges $-\rho$.



Calcul du champ électrostatique créé par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume.
On appelle ρ la densité volumique de charges.



Calcul du champ électrostatique en trois étapes :

— Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.

— La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant O_z, donc $\vec{E}$ aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et z. Bilan : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

— Théorème de Gauss appliqué à la surface fermée (Σ) : cylindre de hauteur h passant par M et de rayon r.

Le flux du champ électrostatique à travers Σ_1 et Σ_2 est nul car les vecteurs éléments de surface sont orthogonaux au champ électrostatique.

$$\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_{\Sigma_3} E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r$$

D'où :

$$\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = E(r)2\pi rh$$

D'après l'exercice, le point M se situe à l'intérieur de la cavité. On a donc $r \leq R$, soit $Q_{\text{int}} = \rho\pi r^2 h$.
Le champ électrostatique est donc :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\vec{u}_r}$$

Pour chaque cylindre, on a une origine différente pour les coordonnées cylindriques.

Pour le cylindre de centre O_1, on définit H_1 le projeté orthogonal de M sur l'axe O_1z. On a : $H_1M = r_1\vec{u}_{r_1}$, donc :

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\rho r_1}{2\epsilon_0}\vec{u}_{r_1} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\overrightarrow{H_1M}}$$

Pour le cylindre de centre O_2, on définit de même H_2 le projeté orthogonal de M sur l'axe O_2z. Il suffit de remplacer H_1 par H_2 et ρ par $-\rho$, soit :

$$\boxed{\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{2\epsilon_0}\overrightarrow{H_2M}}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\overrightarrow{H_1H_2}}$$

Exercice 9: Étude du système Terre-électrosphère (⋆⋆)

1. Tout plan passant par O et M est un plan de symétrie de la distribution de charges, donc $\vec{E}(M) = E(r,\theta,\phi)\vec{e}_r$ appartient à l'ensemble de ces plans.
   Il y a invariance de la distribution de charges autour de n'importe quel axe passant par O, donc $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r}$.
   Par application du théorème de Gauss en prenant pour surface de Gauss Σ une sphère de centre O et de rayon $r \in]R, R+h[$:

$$4\pi r^2 E(r) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{E}(r \in]R,R+h[) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$$

   On retrouve que pour une distribution sphérique, le champ créé en dehors de la distribution est équivalent à celui produit par la charge totale placée au centre de la distribution.
   Si $r < R$, alors il n'y a pas de charges à l'intérieur de la surface de Gauss, donc

$$\boxed{\vec{E}(r < R) = \vec{0}}.$$

   Si $r > R+h$, alors $Q_{\text{int}} = Q - Q = 0$, donc

$$\boxed{\vec{E}(r > R+h) = \vec{0}}.$$

   On constate que le champ électrique est discontinu au niveau des distributions surfaciques de charges, ce qui était prévisible.

2. On exprime la circulation :

$$\int_R^{R+h} \vec{E}(r)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}r\,\vec{e}_r = \int_R^{R+h} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

   On écrit le lien entre la circulation et la différence de potentiel :

$$\int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}}V \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -(V(B) - V(A))$$

   On en déduit

$$\int_R^{R+h} \vec{E}(r)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}r\,\vec{e}_r = V(R) - V(R+h)$$

   Or $V(R) = 0$, donc

$$\boxed{V(R+h) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)}$$

3. Par définition, $Q = CU$ pour un condensateur. Ici $U = V(R+h) - V(R) = V(R+h)$. On en déduit

$$\boxed{C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R+h}}}$$

   On effectue un DL à l'ordre 1 en h/R :

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R}{1 - (1+h/R)^{-1}} \approx \frac{4\pi\epsilon_0 R}{\dfrac{h}{R}}$$

   On en déduit

$$\boxed{C \approx \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{h}}$$

   On retrouve la formule du condensateur plan de surface $S = 4\pi R^2$ des armatures, espacées de h.
   AN :

$$C = \frac{4\pi \times 8{,}85\times10^{-12} \times (6\times10^6)^2}{6\times10^4} = 6{,}67\times10^{-2}\,\mathrm{F}$$

4. L'énergie électrostatique est

$$W_{\text{elec}} = \frac{1}{2}CU^2 = 4{,}3\times10^9\,\mathrm{J}$$

On exprime le champ électrique en R^+ :

$$E(R^+) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{CU}{4\pi\epsilon_0 R^2} \approx \frac{U}{h}$$

On a une expression simplifiée : le champ électrique est uniforme entre les armatures d'un condensateur plan !

AN :

$$E(R^+) \approx \frac{360 \times 10^3}{60 \times 10^3} = 6\,\mathrm{V\,m^{-1}}$$

Exercice 10: Anneau chargé (⋆⋆⋆)

1. On travaille en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$$

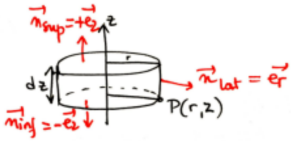
Le plan $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de charge, le champ $\vec{E}(P)$ lui appartient, il n'a donc pas de composante orthoradiale : $E_\theta(r,\theta,z) = 0$.

2. La distribution de charge est invariante par toute rotation autour de (Oz) donc la norme de $\vec{E}(P)$ est indépendante de θ :

$$\vec{E}(P) = E_r(r,z)\vec{e}_r + E_z(r,z)\vec{e}_z$$

3. Une surface fermée située au voisinage de l'axe ne renferme aucune charge. D'après le théorème de Gauss, le flux de $\vec{E}$ à travers une telle surface est donc nul. La circulation de tout champ $\vec{E}$ est nulle sur un contour fermé.

4. On découpe la surface fermée en un disque inférieur, un disque supérieur et une surface latérale



Le flux est donc donné par

$$\Phi = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_{latérale}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_{inf}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_{sup}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\Leftrightarrow \Phi = E_r(r,z) \times 2\pi r dz - E_z(r,z) \times \pi r^2 + E_z(r,z+dz) \times \pi r^2$$

Or, d'après le théorème de Gauss, ce flux est nul puisque la surface ne contient aucune charge intérieure.

Si on suppose que sur l'ensemble du disque (inférieur ou supérieur), la composante axiale du champ varie peu (ce qui est justifié dans le cas où r/L^* est de l'ordre de 1), alors

$$E_z(r, z+dz) \approx E_z(0, z+dz) = E_0(z+dz)$$
$$E_z(r,z) \approx E_z(0,z) = E_0(z)$$

Il vient par conséquent

$$E_r(r,z) = -\frac{r}{2} \times \frac{E_0(z+dz) - E_0(z)}{dz} = \boxed{-\frac{r}{2} \times \frac{\mathrm{d}E_0(z)}{\mathrm{d}z}}$$

5. Développement limité de $E_z(r,z)$ à z fixé autour de $r = 0$:

$$E_z(r,z) = E_z(0,z) + r\frac{\partial E_z}{\partial r}(r=0,z) + \frac{r^2}{2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}(r=0,z) + o(r^2)$$

or tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie donc le champ en $r = 0$ est extrémal : $\frac{\partial E_z}{\partial r}(r=0,z) = 0$. Donc, $E_z(r,z) - E_z(0,z)$ est au moins d'ordre 2 en r.

6.

$$\mathcal{C} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \vec{E}(r,z)\cdot dr\vec{e}_r + \vec{E}(r+dr,z)\cdot dz\vec{e}_z + \vec{E}(r,z+dz)\cdot(-dr\vec{e}_r) + \vec{E}(r,z)\cdot(-dz\vec{e}_z)$$
$$\Leftrightarrow 0 = E_r(r,z)dr + E_z(r+dr,z)dz - E_r(r,z+dz)dr - E_z(r,z)dz$$

On a :

$$\frac{E_r(r,z+dz) - E_r(r,z)}{dz} = \frac{E_z(r+dr) - E_z(r,z)}{dr}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial E_r(r,z)}{\partial z} = \frac{\partial E_z(r,z)}{\partial r}}$$

Or $E_r(r,z) = -\frac{r}{2} \times \frac{\mathrm{d}E_0(z)}{\mathrm{d}z}$, on a :

$$\frac{\partial E_z(r,z)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{r}{2} \times \frac{\mathrm{d}E_0(z)}{\mathrm{d}z}\right) = -\frac{r}{2} \times \frac{\mathrm{d}^2 E_0(z)}{\mathrm{d}z^2}$$

En intégrant entre 0 et r (à z constant), on a donc :

$$\boxed{E_z(r,z) = E_z(0,z) - \frac{r^2}{4} \times \frac{\mathrm{d}^2 E_0(z)}{\mathrm{d}z^2}}$$

7. Ordre 0 : $\boxed{\vec{E}(P) = E_0(z)\vec{e}_z}$

   Ordre 1 : $\boxed{\vec{E}(P) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}z}\vec{e}_r + E_0(z)\vec{e}_z}$

   Ordre 2 : $\boxed{\vec{E}(P) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}z}\vec{e}_r + \left(E_0(z) - \frac{r^2}{4}\frac{\mathrm{d}^2E_0}{\mathrm{d}z^2}\right)\vec{e}_z}$

   A l'ordre 0, le champ est essentiellement suivant $\vec{e}_z$. La première correction (ordre 1) correspond à une composante radiale. La deuxième correction (ordre 2) modifie légèrement la composante suivant $\vec{e}_z$.

Exercice 11: Modèle d'orbitale atomique (⋆⋆⋆)

1. En intégrant sur tout l'espace, on doit avoir $\int_V \mathrm{d}q = 0$. Comme la distribution de charges ρ_e est à symétrie sphériques, on intègre sur le volume élémentaire $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\mathrm{d}r$. Donc on doit résoudre :

$$e + \int_0^{+\infty} 4\pi r^2 K \exp\left(-2r/a_0\right)\mathrm{d}r = 0$$

   On pose $u = 2r/a_0$, alors $r = \frac{a_0 u}{2}$ et $\mathrm{d}r = \frac{a_0}{2}\mathrm{d}u$. On a alors

$$4\pi\left(\frac{a_0}{2}\right)^3 K\int_0^{+\infty} u^2\exp(-u)\mathrm{d}u = -e \quad \text{soit} \quad \frac{\pi K a_0^3}{2}\underbrace{\left[-\left(u^2+2u+2\right)\exp(-u)\right]_0^{\infty}}_{2} = -e$$

   On en déduit :

$$\boxed{K = -\frac{e}{\pi a_0^3}}$$

   On a bien $K < 0$, donc $\rho_e(r) < 0$, et K en $\mathrm{C\,m^{-3}}$.

2. Comme la distribution est à symétrie sphérique, $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$. On choisit comme surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon r. D'après le théorème de Gauss :

$$\underbrace{\oiint_{\Sigma_G}\vec{E}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M}_{4\pi r^2E(r)} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad Q_{\text{int}} = e + \int_0^r 4\pi s^2 K\exp\left(-2s/a_0\right)\mathrm{d}s$$

   En effectuant le changement de variable, on en déduit la charge à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= e + \underbrace{4\pi\left(\frac{a_0}{2}\right)^3 K}_{-e/2}\int_0^r u^2\exp(-u)\mathrm{d}u \\ &= e - \frac{e}{2}\left[-\left(u^2+2u+2\right)\exp(-u)\right]_0^{2r/a_0} \\ &= e\left(1 + \frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0}\right)\exp\left(-2r/a_0\right) \end{aligned}$$

   On en déduit le champ électrique :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1 + \frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0}\right)\exp\left(-2r/a_0\right)\vec{e}_r}$$

   L'intensité du champ électrique décroît avec r et tend vers 0 à l'infini.