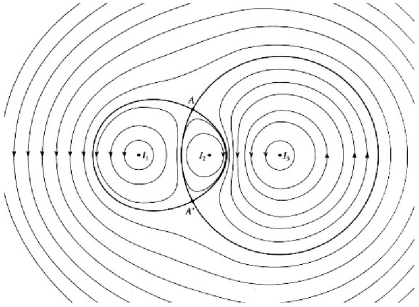
TD 8 : Magnétostatique

Exercice 1: Topographie (⋆)

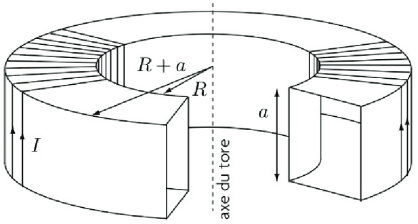
Le schéma représente les lignes de champ magnétique créé par trois fils infiniment longs, perpendiculaires au plan du schéma, parcourus par les courants I_1, I_2 et I_3. Par convention, un courant dirigé vers le lecteur est positif.



1. Déterminer sans aucun calcul le signe de I_1, I_2 et I_3 et celui de la somme $I_1+I_2+I_3$.
2. Quelle est la valeur du champ B en A et en A' ?
3. Soit $|I_2| = 1A$, en déduire une valeur approchée de I_1 et I_3.

Exercice 2: Bobine torique (⋆)

Considérons une bobine torique formé de N spires jointives carrées (où N est très grand) telle que celle-ci :

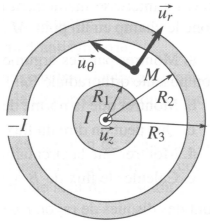


1. Calculer l'expression du champ magnétostatique à l'intérieur et à l'extérieur du tore.
2. Calculer le flux magnétique à travers une spire, puis le flux total à travers le tore. En déduire l'inductance du tore.

Exercice 3: Câble coaxial (⋆⋆)

1. Énoncer le théorème d'Ampère relatif à la circulation du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ le long d'un contour fermé C constitué de points M et s'appuyant sur une surface S. On notera $\overrightarrow{j}(P)$ la densité de courant en un point P de la surface S.

On considère un câble coaxial cylindrique de longueur supposée infinie, constitué d'un conducteur central plein de rayon R_1, parcouru par un courant uniforme d'intensité I et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur R_2, de rayon extérieur R_3 avec $R_1 < R_2 < R_3$ et parcouru par un courant uniforme également d'intensité I mais circulant en sens inverse par rapport au courant conducteur central.
On notera $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur directeur unitaire de l'axe commun des 2 conducteurs. Soit un point M à une distance r de l'axe du câble.



2. (a) Montrer que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé au point M est orthoradial.
   (b) Montrer qu'il peut se mettre sous la forme $\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{u_\theta}$.
   (c) Préciser alors la forme des lignes de champ.
3. (a) Montrer que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé au point M est nul si $r > R_3$.
   (b) Expliquer l'intérêt du câble coaxial par rapport à un fil simple parcouru par un courant de même intensité.
4. Calculer les densités de courant $\overrightarrow{j_1}$ et $\overrightarrow{j_2}$ respectivement du conducteur central et du conducteur périphérique en fonction des courants I_1 et I_2 et des rayons R_1, R_2 et R_3.
5. En appliquant le théorème d'Ampère à un contour C que l'on précisera, donner l'expression de la composante $B(r)$ du champ magnétique créé au point M en fonction de μ_0, I, r, R_1, R_2 et R_3 dans chacun des cas suivant la valeur de r.
6. Vérifier la continuité de B.
7. Tracer $B(r)$.

Exercice 4: Cartes de champ magnétostatique (⋆)

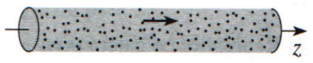
Tracer l'allure, dans le plan (xOy) des lignes du champ magnétostatique créé par les distributions suivantes :

1. Deux fils infinis parallèles d'axe (Oz), distants de d, parcourus par des courants de même intensité I et de même sens.

2. Deux fils infinis parallèles d'axe (Oz), distants de d, parcourus par des courants de même intensité I mais de sens opposés.
3. Trois fils infinis parallèles d'axe (Oz), placés au sommet d'un triangle équilatéral, parcourus par des courants de même sens et intensité.

Exercice 5: Champ créé par un faisceau cylindrique d'électrons ($\star$)

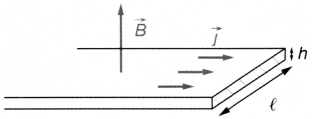
Un faisceau électronique a la forme d'un cylindre très long de rayon R et d'axe (Oz). Les électrons ont tous la même vitesse $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_z}$; et ils sont uniformément répartis avec une densité de n électrons par unité de volume.



1. En adoptant un modèle volumique, calculer la densité volumique de charge et le vecteur densité volumique de courant.
2. Calculer le champ électrique en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z).
3. Calculer le champ magnétique. Quelle relation relie $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$?
4. Le faisceau peut-il rester cylindrique ?

Exercice 6: Effet Hall ($\star\star$)

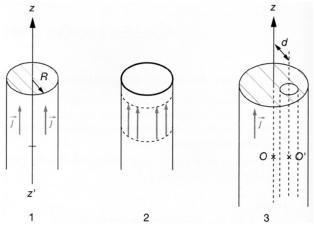
Soit une portion de conducteur ayant la forme d'un ruban de largeur ℓ et d'épaisseur h selon Oz. Le milieu comprend une densité volumique d'ions fixes notée n et une densité électronique de même valeur. Un champ magnétique permanent et uniforme règne en tout point : $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$. En régime permanent, une intensité I circule le long du ruban, avec une densité de courant uniformément répartie $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{u_x}$.



1. Expliquer qualitativement que des densités surfaciques de charges sont présentes latéralement et préciser le sens du champ électrique qu'elles créent.
2. En régime permanent, les électrons mobiles sont soumis au champ électromagnétique total et à une force de frottement fluide. Donner l'expression du champ électrique transversal $\overrightarrow{E_H}$, appelé champ de Hall, en fonction de n, I, B, des dimensions du ruban et de la charge élémentaire e.
3. Quelle est la force subie par les ions fixes du fait de la présence de $\overrightarrow{E_H}$? Donner l'expression de la densité volumique de cette force en fonction de $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{B}$, puis de la densité linéique en fonction de I et B.

Exercice 7: Modèles de fils ($\star\star\star$)

Un conducteur cylindrique de rayon R, de dimension infinie selon l'axe $(z'Oz)$, est parcouru par un courant d'intensité constante I.

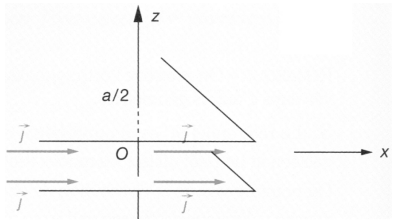


1. La distribution est modélisée dans un premier temps à l'aide d'une densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ uniforme. Déterminer le champ magnétique en tout point.
2. Reprendre la question précédente, si la conduction n'est que superficielle (l'intensité circule uniformément selon Oz sur la seule surface du cylindre).
3. On reprend la première modélisation mais cette fois se trouve dans le cylindre une cavité cylindrique de rayon r et d'axe $O'z$, avec O' à la distance d de Oz tel que $d + r < R$. Montrer que le champ magnétique à l'intérieur de cette cavité est uniforme.

Exercice 8: Champ créé par une nappe de courant ($\star\star$)

1. **Propriétés du champ**

   On considère une distribution volumique de courant délimitée par les deux plans d'équation $z = -\frac{a}{2}$ et $z = \frac{a}{2}$. On suppose qu'entre ces plans la densité volumique de courant est uniforme : $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{u_x}$.



   (a) Examiner les invariances géométriques, pour en déduire de quelle(s) coordonnée(s) dépend le champ ?

   (b) Faire de même avec les symétries et préciser la direction du champ magnétique en tout point.

(c) Que peut-on dire de la valeur du champ sur le plan xOy ?

2. **Expressions du champ**

   (a) Proposer un contour d'Ampère qui permette d'exprimer le champ créé par la distribution de courant en un point M de cote z, en exploitant la nullité du champ sur le plan xOy.

   (b) Préciser alors l'expression du champ magnétique au point M, selon la valeur de z, dans le cas où z est positive.

   (c) Tracer le graphe de $B = f(z)$, en précisant par des arguments de symétrie la parité ou l'imparité de cette fonction.

3. On considère que l'épaisseur a est petite devant les autres dimensions. On modélise alors la distribution de courant par une distribution surfacique $\vec{j}_s$ de courant. Exprimer $\vec{j}_s$ en fonction de j et a, ainsi que le champ magnétique en fonction de j_s. Le résultat est-il en accord avec la relation de passage pour le champ magnétique en présence de courants surfaciques :

$$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{2\to 1}$$

Exercice 9: Modèle de Bean d'un supraconducteur (⋆⋆)

Un supraconducteur est un matériau capable de conduire l'électricité sans aucune résistance lorsqu'il est porté à température suffisamment faible. Les applications incluent la transmission d'énergie sans perte, la création d'aimants puissants pour l'IRM médicale, la lévitation magnétique des trains à grande vitesse, ou encore la conception de détecteurs sensibles de champs magnétiques.

Parmi les nombreuses propriétés physiques associées à la supraconductivité figure l'effet Meissner : qualitativement, le champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur est toujours nul, quel que soit le champ extérieur. Cet effet peut s'interpréter par l'apparition de courants à la surface du supraconducteur, qui créent un champ venant compenser le champ extérieur. Le modèle de Bean suppose ces courants répartis en volume dans une couche d'épaisseur δ, avec une densité volumique J_c uniforme, appelée densité de courant critique, qui est une caractéristique de chaque matériau. Dans ce modèle, c'est l'épaisseur δ qui varie en fonction de l'intensité du champ extérieur.

Cet exercice a pour objectif d'estimer l'épaisseur δ dans une géométrie de type ruban, où l'une des dimensions du supraconducteur est très inférieure aux deux autres (figure 1) : on suppose l'échantillon infini dans les directions (Oy) et (Oz), d'épaisseur $2a$ dans la direction (Ox), placé dans un champ extérieur $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$. Une telle géométrie est très utilisée en pratique car elle facilite la fabrication et la manipulation des échantillons.

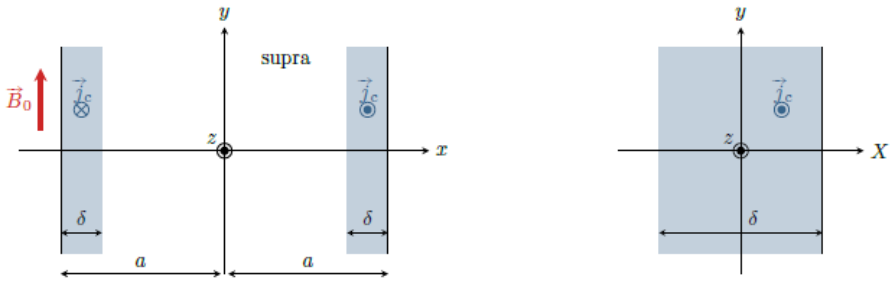


FIGURE 1 – Modèle de Bean d'un supraconducteur. Gauche : vue d'ensemble du ruban supraconducteur. Droite : zoom sur la couche conductrice de droite.

1. Dans un premier temps, considérons uniquement la couche conductrice située du côté $x > 0$, parcourue par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j}_c = J_c \vec{e}_z$. La variable X est définie de telle sorte que la position $X = 0$ corresponde au milieu de la couche conductrice. Déterminer la direction du champ magnétique créé par cette couche et les variables dont il dépend.
2. Justifier par des raisons de symétrie que la champ magnétique est nécessairement nul dans le plan $X = 0$.
3. Par application du théorème d'Ampère, en déduire le champ créé en tout point de l'espace par cette couche conductrice uniquement.
4. On consdière désormais l'ensemble du système. Déterminer l'épaisseur δ nécessaire pour que le champ magnétique soit nul à l'intérieur du supraconducteur.
5. Représenter la norme $||\vec{B}||$ du champ magnétique en fonction de x.

Éléments de réponses :

Exercice 1

Q3 : $I_1 = 1\,\text{A}$ et $I_3 \approx 2\,\text{A}$.

Exercice 2

Q1 : $\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\vec{u}_\theta$ et $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$

Q2 : $L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} a \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$

Exercice 3

Q5 :

— Pour $r < R_1$, $B = \frac{\mu_0 j_1 r}{2}$.
— Pour $R_1 < r < R_2$, $B = \frac{\mu_0 j_1 R_1^2}{2r}$.
— Pour $R_2 < r < R_3$, $B = \frac{\mu_0 j_1 R_1^2}{2r} - \frac{\mu_0 j_2 (r^2 - R_2^2)}{2r}$.

Exercice 5

Q2 : $\vec{E} = -\frac{n\,e\,R^2}{2\epsilon_0\,r}\,\vec{e}_r \quad \text{si } r > R \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{n\,e\,r}{2\epsilon_0}\,\vec{e}_r \quad \text{si } r < R$

Q3 : $\vec{B} = -\frac{\mu_0\,n\,e\,v\,R^2}{2\,r}\,\vec{e}_\theta \quad \text{si } r > R$ et $\vec{B} = -\frac{\mu_0\,n\,e\,v\,r}{2}\,\vec{e}_\theta \quad \text{si } r < R$

Q4 : $\vec{F} = \frac{n\,e^2\,r}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\vec{e}_r$

Sous l'effet de son propre champ électromagnétique, un faisceau électronique initialement parallèle tend à diverger.

Exercice 6

Q2 : $\vec{E}_H = \frac{-IB}{ne\ell h}\vec{u}_y$

Q3 : $\mathrm{d}\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B}\ell\,h\,\mathrm{d}L = I\mathrm{d}\vec{L} \wedge \vec{B}$

Exercice 7

Q1 :

— $r < R, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}\,\vec{u}_\theta$;
— $r > R, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta$.

Q2 :

— $r \leq R, \quad \vec{B} = \vec{0}$;
— $r \geq R, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta$.

Q3 : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\vec{j} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2}$ est indépendant du point M dans la cavité.

Exercice 8

Q2 :

— $B_y = -\mu_0 j \frac{a}{2}, \quad \text{pour} \quad z > \frac{a}{2}$,
— $B_y = -\mu_0 j z, \quad \text{pour} \quad 0 < z \leq \frac{a}{2}$.

Q3 : $\vec{j}_s = ja\vec{u}_x$ et $\vec{B} = \begin{cases} -\mu_0 j_s/2 & \text{si} \quad z > a/2 \\ \mu_0 j_s/2 & \text{si} \quad z < -a/2 \end{cases}$

Exercice 9

Q3 : $\vec{B}(|X| \leq \delta/2) = \mu_0 J_c X \vec{e}_y$ et $\vec{B}(|X| > \delta/2) = \dfrac{X}{|X|} \times \dfrac{\mu_0 J_c \delta}{2}\vec{e}_y$

Q4 : $\delta = \dfrac{B_0}{\mu_0 J_c}$