TP 10 : Spectrogoniomètre à prisme (thème optique)

Nature et méthodes	Capacités exigibles
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.
Analyse d'une lumière.	Mesurer une longueur d'onde à l'aide d'un goniomètre équipé d'un réseau.

Faire les questions de l'étude théorique du prisme (dernière partie du sujet). Revoir la méthode d'autocollimation dans le cours d'optique de MPSI, ainsi que le réglage du goniomètre vu en MPSI.

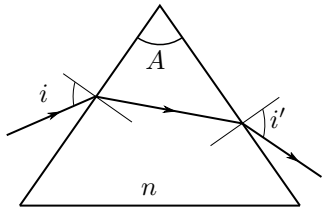
1 Théorie : synthèse

On étudie la dispersion de la lumière par un prisme en verre d'indice n et d'angle au sommet A. On peut montrer que la lumière ne ressort du prisme que si le rayon incident arrive du côté de la base du prisme avec un angle d'incidence supérieur à

$$i_0 = \arcsin\left[n \sin\left(A - \arcsin(1/n)\right)\right].$$

On peut aussi montrer que l'angle de déviation $D = i' - i$ passe, lorsque i varie, par un minimum D_m vérifiant la relation :

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin(A/2)}}$$



2 Réglage du goniomètre

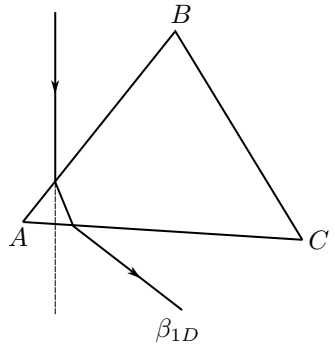
Procéder au réglage de la lunette, du collimateur et de sa fente comme expliqué dans le polycopié « Réglage du goniomètre ».

3 Mesure d'un minimum de déviation

3.1 Mesure

Il est impératif d'utiliser ici une lumière monochromatique, par exemple le doublet jaune de la lampe à vapeur de sodium.

Placer le prisme de telle manière que l'angle d'incidence i de la lumière soit très grand ($60 - 70$ °) donc le faisceau incident doit arriver du côté de la base du prime (voir figure ci-dessous). Observer le faisceau réfracté avec la lunette. Si vous ne voyez pas de faisceau réfracté c'est que votre angle i est trop faible.



Viser la raie jaune du doublet du sodium.

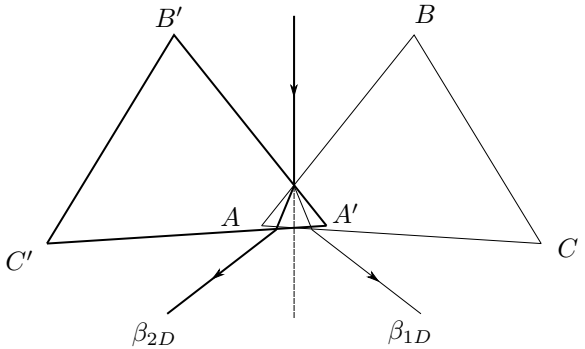
Faire tourner très lentement la platine porte-prisme, tout en suivant à la lunette le déplacement de l'image de la fente à travers le prisme : l'image se déplace dans un sens, puis rétrograde, bien que le prisme continue à tourner dans le même sens : la déviation pour laquelle on observe l'inversion de sens est la déviation minimale.

Fixer la platine dans cette position et pointer la position de l'image jaune, au minimum de déviation, à droite, le bord de la fente coïncidant avec le fil vertical du réticule (le réglage s'effectue d'abord à la main, puis s'affine à la vis micrométrique).

Mesurer précisément à la minute près en utilisant le vernier (voir poly « Réglage du goniomètre ») la position β_{1D} correspondante. L'incertitude de lecture de l'ordre

de la minute d'angle est bien plus faible que l'incertitude de « réglage » lié à chaque expérimentateur. Pour évaluer l'incertitude, il faut ici réaliser plusieurs fois (minimum 4, 2 par élève) la mesure afin d'évaluer une incertitude de type A.

Faire tourner la platine pour que le prisme prenne une position $A'B'C'$ sensiblement symétrique de la position ABC.



Recommencer les mêmes opérations et les mêmes mesures que précédemment. En déduire plusieurs mesures de la position β_{2D} correspondant à la raie jaune, au minimum de déviation, à gauche.

On peut voir sur la figure que

$$D_m(\lambda_D) = \frac{|\beta_{2D} - \beta_{1D}|}{2}$$

Ouvrir et compléter le Jupiter Notebook afin d'évaluer D_m et l'incertitude-type associée à cette mesure.

3.2 Application à la mesure de l'indice du prisme

Sachant que l'angle du prisme étudié est $A = 60\ °$, déduire de la mesure précédente l'indice n du verre dans lequel il est taillé pour cette longueur d'onde et l'incertitude-type sur cette mesure.

4 Vérification de la loi de Cauchy

On souhaite vérifier la loi de Cauchy selon laquelle l'indice optique évolue avec la longueur d'onde comme

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2} \quad \text{avec} \quad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$$

Remplacer la lampe à vapeur de sodium par une lampe à vapeur de mercure.

Mesurer D_m et évaluer son incertitude pour différentes longueurs d'onde.

On donne les principales raies émises par la lampe à vapeur de mercure (les plus lumineuses sont celles qui sont soulignées) :

λ(nm)	690,7	623,4	579,0 ; 576,9	546,1
couleur	rouge	orangé	jaune	vert

λ(nm)	496,0 ; 491,6	435,8 ; 434,7 ; 433,9	407,8 ; 404,7
couleur	bleu	indigo	violet

Utiliser le Jupiter Notebook pour vérifier de la loi de Cauchy par une régression linéaire avec tracé des écarts normalisés.

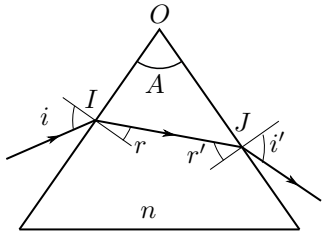
Retenir les méthodes (évaluation d'une incertitude de type A, tracé d'une régression linéaire, tracé des barres d'incertitude, calcul des écarts normalisés, critères de vérification d'une loi) et les instructions np.polyfit, np.polyval, plt.errorbar.

Conclure sur la vérification de la loi de Cauchy.

Critère : la loi est validée si les écarts normalisés sont tous inférieurs à 2 ou si la droite de régression passe à l'intérieur de toutes les barres d'incertitude de demi-largeur $2u(n)$.

5 Partie théorique à préparer

On considère un prisme d'angle A et d'indice n plongé dans l'air d'indice 1. Les angles sont non orientés comme sur la figure.



1. Établir la relation liant A, r et r'.

On cherche dans un premier à établir la condition d'émergence du rayon lumineux en J.

2. Quelle doit être l'inégalité vérifiée par r' ? En déduire celle vérifiée par r.
3. Montrer que pour qu'il y ait un rayon sortant du prisme, il faut $A \leq 2\arcsin(1/n)$ et $i \geq i_0$ avec $i_0 = \arcsin\left(n\sin\left(A - \arcsin(1/n)\right)\right)$.
4. Calculer la valeur maximale de A pour $n = 1,75$. En TP nous utilisons un prisme d'angle $A = 60\ °$. Est-ce compatible ? Calculer i_0 avec $A = 60\ °$ et $n = 1,75$.

On va maintenant étudier l'évolution de la déviation en fonction de i. On se place bien évidemment dans le cas où le rayon émerge du prisme.

5. Après avoir définies les déviations $D_1 > 0$ en I et $D_2 > 0$ en J, en déduire l'expression de la déviation totale D en fonction de i, i', r et r', puis en fonction de i, i' et A. Toutes les déviations seront géométriques.
6. Dériver les lois de Snell-Descartes en I et J par rapport à i. Trouver une relation entre $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$ et $\dfrac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}i}$, et en déduire l'expression de la dérivée de la déviation par rapport à i :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 1 - \frac{\cos(i)\cos(r')}{\cos(i')\cos(r)}}$$

D présente un extremum en i_m tel que $i = i' = i_m$ et $r = r' = r_m$. On peut justifier à l'aide du principe de retour inverse de la lumière ou en résolvant $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0 \quad \text{alors} \quad \cos(i)\cos(r') = \cos(i')\cos(r) \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2(i)\cos^2(r') = \cos^2(i')\cos^2(r)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\sin^2(i))(1-\sin^2(r')) = (1-\sin^2(i'))(1-\sin^2(r))$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\frac{1}{n^2}\sin^2(i')-\sin^2(i)+\sin^2(i)\times\frac{1}{n^2}\sin^2(i') = 1-\frac{1}{n^2}\sin^2(i)-\sin^2(i')+\sin^2(i')\times\frac{1}{n^2}\sin^2(i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2(i)\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sin^2(i')\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2(i) = \sin^2(i')$$

Comme i et i' sont de même signe, on a $\boxed{i = i'}$. Par les relations de Snell-Descartes, cela implique $\boxed{r = r'}$.

7. En déduire les expressions de i_m et r_m en fonction de A et D_m. En déduire l'expression de l'indice optique

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\dfrac{A+D_m}{2}\right)}{\sin(A/2)}}$$