Formulaire d'analyse vectorielle

I Rappels : circulation et flux

I.1 Circulation

Soit un champ vectoriel $\vec{a}(M)$, Γ une courbe orientée et $\mathrm{d}\vec{\ell}_M$ l'élément de longueur de Γ en M et orienté dans le sens de Γ.

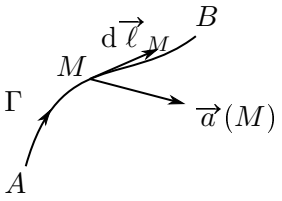
On définit

— la circulation élémentaire de $\vec{a}$:

$$\delta\mathcal{C}(\vec{a}) = \vec{a}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_M$$

— la circulation de $\vec{a}$ entre deux points A et B de Γ :

$$\mathcal{C}_{AB}(\vec{a}) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_M$$



— la circulation de $\vec{a}$ sur un contour fermé Γ :

$$\mathcal{C}_\Gamma(\vec{a}) = \oint_\Gamma \vec{a}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_M$$

I.2 Flux

Soit un champ vectoriel $\vec{a}(M)$, Σ une surface orientée, $\mathrm{d}\vec{S}_M = \mathrm{d}S_M\vec{n}_M$ le vecteur élément de surface en M, d'intensité $\mathrm{d}S_M$, orthogonal à Σ en M et orienté selon Σ. On note $\vec{u}_M$ le vecteur unitaire lié à cette orientation.

On définit

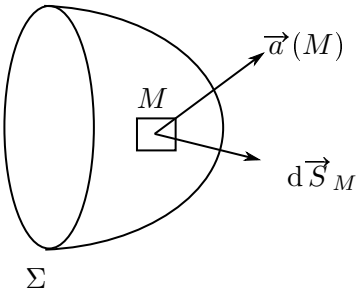
— le flux élémentaire de $\vec{a}$:

$$\mathrm{d}\phi(\vec{a}) = \vec{a}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M$$

— le flux de $\vec{a}$ à travers une surface Σ orientée :

$$\phi_\Sigma(\vec{a}) = \iint_\Sigma \vec{a}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M$$

Remarque : Il existe deux sens d'orientation de la surface.



— le flux de $\vec{a}$ à travers une surface fermée

$$\phi_\Sigma(\vec{a}) = \oiint_\Sigma \vec{a}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M$$

Remarque : Par convention, il s'agit du flux sortant.

II Opérateurs différentiels

II.1 Interprétation physique - expression en coordonnées cartésiennes

Définition n°1 Gradient

Le gradient est un opérateur qui s'applique à un champ scalaire f et qui retourne un champ vectoriel. Il retranscrit les variations spatiales de f selon les différentes direction de l'espace.
En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z}$$

Remarque : On a $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.
Remarque : $[\overrightarrow{\text{grad}}] = L^{-1}$

Définition n°2 Divergence

La divergence est un opérateur qui s'applique à un champ vectoriel $\vec{A}$ et retourne un champ scalaire. En coordonnées cartésiennes, on a

$$\boxed{\text{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

La divergence représente à l'échelle locale les variations de densité de flux.

Remarque : $[\text{div}] = L^{-1}$

Définition n°3 Rotationnel

Le rotationnel est un opérateur qui s'applique à un champ vectoriel et retourne un champ vectoriel. En coordonnées cartésiennes, on a

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{pmatrix}}$$

Le rotationnel retranscrit la tendance d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point.

Remarque : $[\overrightarrow{\text{rot}}] = L^{-1}$

Définition n°4 Laplacien scalaire

L'opérateur laplacien Δ correspond à l'application de l'opérateur gradient sur un champ scalaire, suivie de l'application de la divergence :

$$\boxed{\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, f)}$$

En coordonnées cartésiennes, on a

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

Remarque : $[\Delta] = L^{-2}$

Définition n°5 Laplacien vectoriel

L'opérateur laplacien vectoriel $\overrightarrow{\Delta}$ s'applique à un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ et retourne un champ vectoriel.
En coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{A} = (\Delta A_x)\,\overrightarrow{e}_x + (\Delta A_y)\,\overrightarrow{e}_y + (\Delta A_z)\,\overrightarrow{e}_z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Remarque : On le note parfois $\Delta\overrightarrow{A}$. C'est cette notation qui est retenue dans le programme de MP.

Définition n°6 Opérateur nabla $\overrightarrow{\nabla}$

En coordonnées cartésiennes, et uniquement en coordonnées cartésiennes, on définit l'opérateur nabla.
On peut alors définir les différents opérateurs en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \overrightarrow{\nabla}(f) \quad ; \quad \text{div}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A} \quad ; \quad \Delta f = (\overrightarrow{\nabla})^2 f$$

$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

II.2 Expressions en coordonnées cylindriques

D'après le programme, seules les expressions des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes sont exigibles.

On définit les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base locale $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_z)$. Les opérateurs s'expriment :

$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\text{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

II.3 Expressions en coordonnées sphériques

On définit les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et la base locale $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_\phi)$. Les opérateurs s'expriment :

$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial(\sin\theta\, A_\phi)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\phi} - \dfrac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \end{pmatrix}$$

$$\text{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

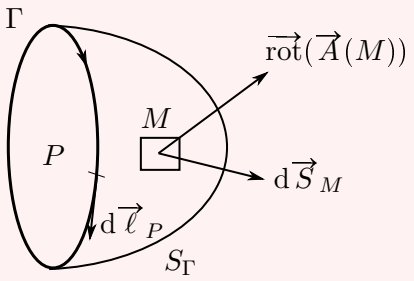
$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

III Théorèmes fondamentaux

Définition n°7 Théorème de Stokes

La circulation d'un vecteur $\vec{A}$ le long d'un contour fermé Γ orienté est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface $\mathcal{S}_\Gamma$ s'appuyant sur Γ et orientée corrélativement avec Γ :

$$\oint_{P\in\Gamma} \vec{A}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = \iint_{M\in\mathcal{S}_\Gamma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}(M))\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$



Définition n°8 Champ dérivant d'un potentiel scalaire

Un champ de vecteur $\vec{A}$ dérive d'un potentiel scalaire V s'il existe V tel que

$$\vec{A} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \vec{0}$$

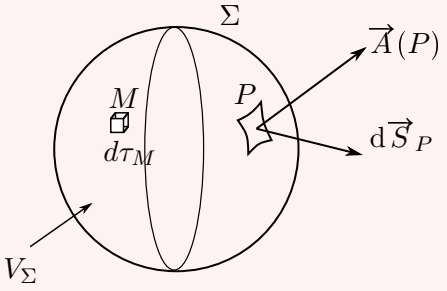
Demonstration ✍

1. Démontrer qu'un champ dérivant d'un potentiel scalaire est à circulation conservative. Conclure qu'alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$.
2. Le potentiel V est-il unique ?

Définition n°9 Théorème d'Ostrogradski

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à travers une surface fermée Σ est égal à l'intégrale de la divergence $\mathrm{div}\,\vec{A}$ sur le volume V_Σ défini par Σ :

$$\oiint_{P\in\Sigma} \vec{A}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P = \iiint_{M\in V_\Sigma} \mathrm{div}(\vec{A}(M))\,\mathrm{d}\tau_M$$



IV Formulaire

Définition n°10 A connaître

- $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}V) = \vec{0}$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\,\vec{A}$
- $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}V) = \Delta V$
- produit mixte :
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b})$$
- double produit vectoriel :
$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$$

Remarque : Ces formules sont rappelées à l'écrit, mais pas toujours à l'oral.
Remarque : D'autres formules, données, peuvent être utiles :

— $\overrightarrow{\text{grad}}(V \times W) = V\,\overrightarrow{\text{grad}}W + W\,\overrightarrow{\text{grad}}V$
— $\text{div}(V\,\overrightarrow{A}) = V\,\text{div}\,\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}V$
— $\text{div}(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}$
— $\overrightarrow{\text{rot}}(V\,\overrightarrow{A}) = V\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\text{grad}}V \wedge \overrightarrow{A}$