EM-4 : Équations de Maxwell

I Loi de conservation de la charge électrique . . . 3
I.1 Forme locale dans le cas à une dimension . . . 3
I.2 Divergence et forme locale dans le cas général . . . 5
I.3 Régime permanent : lien avec la loi des nœuds . . . 7
II Les équations de Maxwell . . . 9
II.1 Énoncé . . . 9
II.2 Équation locale de conservation de la charge . . . 11
II.3 Lien entre forme locale et forme intégrée . . . 13
II.4 Couplage spatio-temporel entre les champ électrique et magnétique . . . 15
III Équations locales en régime stationnaire . . . 15
III.1 Équations de Maxwell en régime stationnaire . . . 15
III.2 Équations de Poisson et de Laplace . . . 17
III.3 Analogie gravitationnelle . . . 17
III.4 Régime stationnaire vs ARQS . . . 19

MP 2026-2027
Aurore Mangin

Chapitre EM-4

Équations de Maxwell

Désormais nous allons considérer des champs électrique et magnétique dépendant du temps. On parle de champ électromagnétique $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$. Les équations de Maxwell décrivent le lien entre ces deux champs, ainsi que leurs sources : la densité volumique de charge $\rho(M,t)$ et la densité volumique de courant $\vec{j}(M,t)$.

I Loi de conservation de la charge électrique

Nous allons retranscrire un postulat fondamental qui est la conservation de la charge électrique. En effet, il n'existe pas de processus créant ou détruisant la charge électrique.

I.1 Forme locale dans le cas à une dimension

Comme indiqué dans le programme de MP, nous considérons un problème unidimensionnel. La densité volumique de charge et la densité volumique de courant s'écrivent alors :

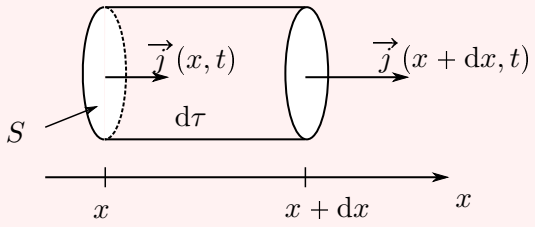
$$\rho(M,t) = \rho(x,t) \quad \text{et} \quad \vec{j}(M,t) = j(x,t)\vec{e}_x$$

Ainsi les charges ne se déplacent que selon $\vec{e}_x$.

Définition n°1 Équation locale de conservation de la charge à une dimension

On montre que la conservation de la charge dans un volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau = S\mathrm{d}x$ s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial j}{\partial x}(x,t) = 0}$$



Demonstration ✍

On note δQ la variation de la charge contenue dans le volume $\mathrm{d}\tau = S\mathrm{d}x$ entre t et $t+\mathrm{d}t$.

1. Exprimer $\delta Q = Q(t+\mathrm{d}t) - Q(t)$ la variation de la charge contenue dans le volume mésoscopique τ à partir de la densité volumique de charge $\rho(x,t)$. On effectuera un DL à l'ordre 1 en $\mathrm{d}t$.
2. Exprimer δQ comme étant la différence entre la charge entrante en x et la charge sortante en $x+\mathrm{d}x$ entre t et $t+\mathrm{d}t$. On effectuera un DL à l'ordre 1 en $\mathrm{d}x$.
3. En déduire l'équation locale de conservation de la charge.

I.2 Divergence et forme locale dans le cas général

Définition n°2 Équation de conservation de la charge électrique

On admet la généralisation en trois dimensions de l'équation de conservation de la charge électrique

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t) + \operatorname{div} \overrightarrow{j}(M,t) = 0}$$

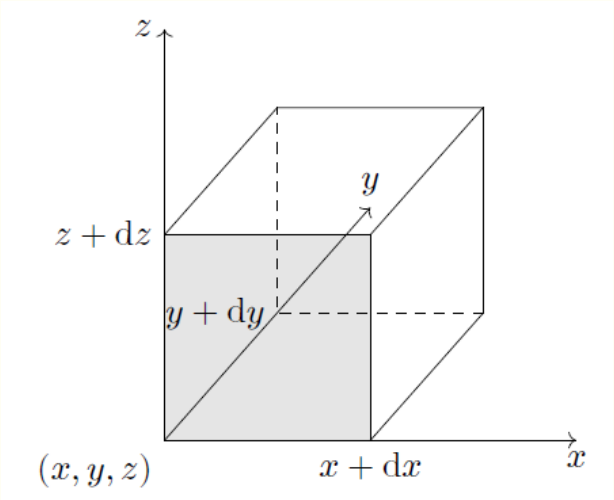
La divergence en coordonnées cartésiennes s'exprime

$$\operatorname{div} \overrightarrow{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial j_y}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial j_z}{\partial z}(x,y,z)$$

Remarque : En coordonnées cartésiennes, on peut utiliser l'opérateur nabla : $\operatorname{div} \overrightarrow{j} = \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{j}$

Demonstration ✍

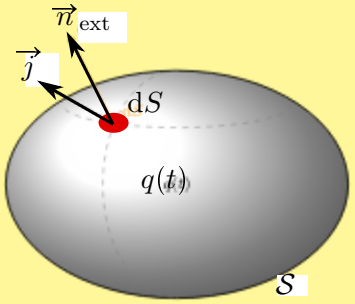
On peut effectuer la démonstration en coordonnées cartésiennes en considérant un volume mésoscopique parallélépipédique $\mathrm{d}\tau$ compris entre x et $x + \mathrm{d}x$, y et $y + \mathrm{d}y$, z et $z + \mathrm{d}z$.



1. Exprimer la variation de la charge δQ entre t et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de $\rho(x,y,z,t)$.
2. Exprimer δQ à partir du flux de charges entrant et sortant par les différentes faces.
3. En déduire l'équation locale de conservation de la charge.

Complément : Démonstration pour un volume quelconque

On peut établir l'équation de conservation de la charge électrique pour un volume V quelconque, décrit par une surface fermée $\mathcal{S}$.



La charge dans le volume V est

$$q(t) = \iiint_{M\in V} \rho(M,t)\mathrm{d}\tau_M$$

L'intensité du courant sortant du volume V s'écrit

$$i_{\text{sortant}} = \oiint_{P\in\mathcal{S}} \vec{j}\,(P,t)\cdot\vec{n}_{\text{ext}}\mathrm{d}S_P$$

Or par principe de conservation de la charge

$$i_{\text{sortant}} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad \text{soit} \quad \oiint_{P\in\mathcal{S}} \vec{j}\,(P,t)\cdot\vec{n}_{\text{ext}}\mathrm{d}S_P = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{M\in V}\rho(M,t)\mathrm{d}\tau_M$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradski, on a

$$\oiint_{P\in\mathcal{S}} \vec{j}\,(P,t)\cdot\vec{n}_{\text{ext}}\mathrm{d}S_P = \iiint_{M\in V}\operatorname{div}\vec{j}\,(M,t)\mathrm{d}\tau_M$$

On en déduit

$$\iiint_{M\in V}\operatorname{div}\vec{j}\,(M,t)\mathrm{d}\tau_M = -\iiint_{M\in V}\frac{\partial\rho}{\partial t}(M,t)\mathrm{d}\tau_M \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}(M,t)+\operatorname{div}\vec{j}\,(M,t)=0}$$

Cette relation est vraie en tout point M de l'espace.

I.3 Régime permanent : lien avec la loi des nœuds

Définition n°3 Régime permanent

En régime permanent, on a

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0 \quad \text{soit} \quad \oiint_S \vec{j}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = 0$$

On dit que $\vec{j}$ est à flux conservatif.

Demonstration ✍

1. Établir que $\vec{j}$ est à flux conservatif en régime permanent.
2. Montrer que l'intensité dans un fil électrique est constante.
3. Établir la loi des nœuds.

II Les équations de Maxwell

II.1 Énoncé

Définition n°4 Champ électromagnétique

On définit un champ électromagnétique grâce à son action sur une charge ponctuelle q, i.e. la force de Lorentz :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = q\left[\overrightarrow{E}(M,t)_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{v}(M,t)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{B}(M,t)_{\mathcal{R}}\right]}$$

Cette relation définit le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}(M,t)_{\mathcal{R}}, \overrightarrow{B}(M,t)_{\mathcal{R}})$ au point M, à l'instant t et dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Remarque : Le champ électromagnétique dépend du référentiel dans lequel on l'étudie. Par la suite on le notera juste $(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t))$ pour alléger les notations.

Définition n°5 Équations de Maxwell

On donne les équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\overrightarrow{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} & \text{Maxwell-Gauss (MG)} \\ \operatorname{div}\overrightarrow{B}(M,t) = 0 & \text{Maxwell-Thomson (MT) ou Maxwell flux} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{E}(M,t) = -\dfrac{\partial B}{\partial t}(M,t) & \text{Maxwell-Faraday (M-F)} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0\left(\overrightarrow{j}(M,t) + \epsilon_0\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}(M,t)\right) & \text{Maxwell-Ampère (M-A)} \end{cases}$$

avec ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide et μ_0 la perméabilité du vide :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \,\text{SI} \quad \text{et} \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7}\text{SI}$$

Remarque : Nous démontrerons que ϵ_0 et μ_0 sont reliés entre eux selon la relation

$$\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$$

avec c la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

Remarque : Le terme $\epsilon_0\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}(M,t)$ est homogène à une densité volumique de courant. On l'appelle parfois le courant de déplacement.

Définition n°6 Propriétés des équations de Maxwell

Retenons les quelques propriétés suivantes :

- Elles sont **linéaires**, donc on peut appliquer le ç**principe de superposition.**
- Elles respectent le **principe de conservation de la charge.**
- Elles relient les causes des champs aux champs :
  - les causes du champ $\overrightarrow{E}(M,t)$ sont
    - les charges $\rho(M,t)$ (d'après M-G),
    - un champ $\overrightarrow{B}(M,t)$ variable temporellement (d'après M-F)
  - les causes du champ $\overrightarrow{B}(M,t)$ sont
    - la densité de courant $\overrightarrow{j}(M,t)$ (d'après M-A),
    - un champ $\overrightarrow{E}(M,t)$ variable temporellement (d'après M-A)

Remarque : Ces équations sont écrites dans le vide : on y fait intervenir la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 et la perméabilité du vide μ_0. Les équations de Maxwell restent valables dans des milieux linéaires, homogènes et isotropes en remplaçant

- ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ le permittivité diélectrique du milieu et ϵ_r sa permittivité diélectrique relative,
- μ_0 par $\mu = \mu_r \mu_0$ le perméabilité du milieu et μ_r sa perméabilité relative.

On peut donner quelques exemples de milieux diélectriques $\mu = \mu_0$ et $\epsilon \neq \epsilon_0$ pouvant se polariser facilement :

- l'air : $\epsilon_r \approx 1,006 \approx 1$ l'air a les propriétés électromagnétiques du vide ;
- l'eau en régime permanent : $\epsilon_r = 84 \gg 1$ donne un fort pouvoir dispersif nécessaire à la mise en solution de solide ionique ;
- l'eau dans le domaine optique : $\epsilon_r = n^2 = (1,33)^2$;
- les céramiques ferroélectriques comme $\epsilon_r(BaTiO_3) = 1760$ utilisées pour réaliser des condensateurs miniatures.

On peut donner quelques exemples de milieux magnétiques $\mu \neq \mu_0$ et $\epsilon = \epsilon_0$ pouvant s'aimanter facilement :

- les permalloy (alliages composés principalement de nickel et de fer) : $\mu_r \approx 10^4 - 10^5$;
- l'acier : $\mu_r \approx 100$;
- le fer pur : $\mu_r \approx 10^5$.

II.2 Équation locale de conservation de la charge

Demonstration ✍

1. Démontrer que les équations de Maxwell sont compatibles avec la loi de conservation de la charge.

II.3 Lien entre forme locale et forme intégrée

À chaque équation locale des équations de Maxwell correspond une forme intégrée, parfois que nous avons déjà rencontrée...

Définition n°7 Interprétation macroscopique des équations de Maxwell

- **Maxwell-Gauss → théorème de Gauss**
  Le flux du champ électrique à travers une surface fermée $\mathcal{S}$ est égal à la charge contenue dans $\mathcal{S}$ divisée par ϵ_0 :
  $$\oiint_{P\in\mathcal{S}} \vec{E}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_{M\in V_\mathcal{S}} \rho(M,t)\mathrm{d}\tau_M$$
- **Maxwell-Flux → le champ $\vec{B}$ est à flux conservatif**
  $$\oiint_{P\in\mathcal{S}} \vec{B}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P = 0$$
- **Maxwell-Faraday → loi de Faraday**
  La circulation du champ électrique le long d'un contour fermé orienté est reliée au flux du champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur ce contour selon
  $$\oint_{P\in\Gamma} \vec{E}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = -\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec} \quad \phi_B(t) = \iint_{M\in\mathcal{S}_\Gamma} \vec{B}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$
  Remarque : La circulation de $\vec{E}$ correspond à la force électromotrice d'induction e.
  Remarque : On fera attention qu'en régime variable, $\vec{E}$ n'étant plus à circulation conservative, on ne peut plus écrire $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$.
- **Maxwell-Ampère → théorème d'Ampère généralisé**
  La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé orienté Γ est liée à l'intensité traversant une surface $\mathcal{S}_\Gamma$ s'appuyant sur Γ et au flux électrique à travers cette surface selon :
  $$\oint_{P\in\Gamma} \vec{B}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = \mu_0 i_{\text{enlacé}} + \mu_0 \underbrace{\iint_{M\in\mathcal{S}_\Gamma} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M}_{i_D} \quad \text{avec} \quad i_{\text{enlacé}} = \iint_{M\in\mathcal{S}_\Gamma} \vec{j}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$
  Remarque : On note i_D les courants de déplacement. Ils traduisent le fait qu'un champ électrique variable est cause du champ magnétique.
  Remarque : En régime stationnaire, on retrouve le théorème d'Ampère vu en magnétostatique : $\oint_{P\in\Gamma} \vec{B}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$.

Demonstration ✍

1. Établir les liens entre les équations locales et les équations intégrées par application des théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradski

II.4 Couplage spatio-temporel entre les champ électrique et magnétique

Les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère montrent

- un couplage entre les variations spatiales de $\vec{E}$ et les variations temporelles de $\vec{B}$ pour l'équation de Maxwell-Faraday ;
- un couplage entre les variations spatiales de $\vec{B}$ et les variations temporelles de $\vec{E}$ pour l'équation de Maxwell-Ampère.

Ce couplage est à l'origine du phénomène de propagation du champ électromagnétique que nous étudierons plus en détail dans les prochains chapitres. Néanmoins, établissons dès à présent l'équation de propagation dans le vide.

Définition n°8 Équation de propagation dans le vide

Dans le vide, le champ électrique et le champ magnétique vérifient une équation de d'Alembert :

$$\Delta\vec{E}(M,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}(M,t) \quad \text{et} \quad \Delta\vec{B}(M,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}(M,t)$$

avec $c = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$.
Les solutions de cette équation seront étudiées ultérieurement.

Demonstration

1. Écrire les équations de Maxwell dans le vide.
2. En utilisant la relation d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$, établir les équations de propagation de $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.

III Équations locales en régime stationnaire

III.1 Équations de Maxwell en régime stationnaire

Définition n°9 Équations de Maxwell en régime stationnaire

En régime stationnaire, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne sont pas couplés.
Les équations locales de l'électrostatique sont

$$\begin{cases} \text{div}\,\vec{E}(M) = \dfrac{\rho(M)}{\epsilon_0} & (M-G) \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}(M) = \vec{0} & (M-F) \end{cases}$$

Les équations locales de la magnétostatique sont

$$\begin{cases} \text{div}\,\vec{B}(M) = 0 & (M-flux) \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}(M) = \mu_0\vec{j}(M) & (M-A) \end{cases}$$

Demonstration

1. Établir les équations locales de l'électrostatique. Faire quelques remarques pertinentes.
2. Faire de même pour les équations locales de la magnétostatique.

III.2 Équations de Poisson et de Laplace

Définition n°10 Équations de Poisson et de Laplace

En électrostatique, il existe la fonction $V(M)$ appelée potentiel électrique telle que $\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M)$. Elle est liée à la densité volumique de charge par l'équation de Poisson :

$$\boxed{\Delta V(M) = -\frac{\rho(M)}{\epsilon_0}}$$

Dans une région vide de charges, cette équation devient $\boxed{\Delta V(M) = 0}$ appelée équation de Laplace.

Demonstration

1. Établir les équations de Poisson et de Laplace

III.3 Analogie gravitationnelle

Les forces gravitationnelle et électrostatique de Coulomb ayant une même structure, nous avons déjà donné l'analogue du théorème de Gauss en gravitation. On peut continuer l'analogie avec l'analogue de la loi de Poisson dans le domaine gravitationnel.

Définition n°11 Analogie électrostatique / gravitationnelle

	Interaction électrostatique	$\leftrightarrow$	Interaction gravitationnelle
Force	$\overrightarrow{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{e}_r}{r^2}$	$\leftrightarrow$	$\overrightarrow{F} = -Gm_1m_2\frac{\overrightarrow{e}_r}{r^2}$
Constante	$\frac{1}{\epsilon_0}$	$\leftrightarrow$	$-4\pi G$
	Charge q	$\leftrightarrow$	Masse m
Champ	$\overrightarrow{E}(M)$	$\leftrightarrow$	$\overrightarrow{g}$
M-F	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{0}$	$\leftrightarrow$	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{g}(M) = \overrightarrow{0}$
Potentiel	$V(M)$ tel que $\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$	$\leftrightarrow$	$\Phi(M)$ tel que $\overrightarrow{g}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M)$
	Charge volumique $\rho(M)$	$\leftrightarrow$	Masse volumique $\mu(M)$
M-G	$\text{div}\,\overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$	$\leftrightarrow$	$\text{div}\,\overrightarrow{g}(M) = -4\pi G\mu(M)$
Équation de Poisson	$\Delta V(M) = -\frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$	$\leftrightarrow$	$\Delta\Phi(M) = 4\pi G\mu(M)$

III.4 Régime stationnaire vs ARQS

L'ARQS est l'étude des régimes lentement variables pour lesquels on peut négliger le propagation des champs électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ et magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$.

Dans l'ARQS, les lois de Kirchhoff (lois des nœuds et des mailles) restent valables.

Définition n°12 ARQS magnétique

Dans l'ARQS magnétique, on néglige le courant de déplacement $\overrightarrow{j}_D = \epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$, alors l'équation de Maxwell-Ampère devient :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0 \overrightarrow{j}(M,t)}$$

Les autres équations sont inchangées :

$$\begin{cases} \text{div}\,\overrightarrow{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \\ \text{div}\,\overrightarrow{B}(M,t) = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \end{cases}$$

Remarque : L'ARQS magnétique consiste à tenir compte de l'induction en négligeant les phénomènes de propagation.

Application n°1 : Domaine de validité de l'ARQS magnétique ✍

1. Dans l'ARQS magnétique, l'équation de conservation de la charge est-elle toujours vérifiée ? Si oui, à quelle condition ? Interpréter avec les lois de l'électrocinétique.
2. L'ARQS consiste à négliger la propagation du champ électromagnétique. Donner un ordre de grandeur de fréquence maximale du champ pour des distances de propagation de l'ordre du mètre.

Complément : ARQS électrique

Il existe un ARQS électrique, approximation qui consiste à négliger l'induction. Les équations de Maxwell s'écrivent alors

$$\begin{cases} \text{div}\,\overrightarrow{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \\ \text{div}\,\overrightarrow{B}(M,t) = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0 \overrightarrow{j}(M,t) + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases}$$

On peut alors définir le potentiel électrique V tel que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.