TD 9 : Dipôles électrique et magnétique

Exercice 1: Interaction entre deux dipôles (⋆)

On souhaite modéliser les interactions de Van der Waals entre un dipôle permanent (comme une molécule d'eau) et un dipôle induit (par exemple, une grosse molécule organique). On place un dipôle permanent de moment dipolaire $\vec{p} = p\vec{e}_z$ au centre O d'un repère.

1. Établir le potentiel et le champ électrique en un point M décrit par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) de centre O et d'axe (Oz). On se placera dans l'approximation dipolaire.

Lorsqu'un morceau de matière est soumis à un champ électrique $\vec{E}$, il se polarise et acquiert un moment dipolaire $\vec{p}' = \alpha\vec{E}$, où α est la polarisabilité. Ce morceau de matière est soumis au champ $\vec{E}$ du dipôle permanent $\vec{p}$ décrit précédemment.

2. Justifier que l'énergie d'interaction de Van der Waals dite dipôle-dipôle induit entre ces deux dipôles (l'un placé en O, l'autre en M) puisse se mettre sous la forme :

$$U = -\frac{C}{r^6}.$$

La constante C dépend-elle de l'orientation relative des deux dipôles ?

Exercice 2: Dipôle électrostatique et condensateur plan (⋆⋆)

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques très fines, de surface S, situées en $x = 0$ et $x = e$.
L'isolant entre les deux armatures a une permittivité ϵ_0. On néglige les effets de bord. Les densités surfaciques de charges portées par les deux armatures sont uniformes et opposées. On rappelle que pour un dipôle rigide placé dans un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}$, l'énergie potentielle est $\mathscr{E}_p = -\overrightarrow{p}.\overrightarrow{E}$ et le moment du couple subi par ce dipôle est $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}$.

1. Déterminer le champ électrostatique à l'intérieur du condensateur en utilisant le champ créé par un plan infini.
2. On place à l'intérieur du condensateur un dipôle électrostatique de moment d'inertie J en un point O d'abscisse $x = e/2$. Il peut tourner autour de l'axe Oz. Déterminer les positions d'équilibre.
3. Étudier la stabilité de l'équilibre.
4. Établir l'équation différentielle en θ liée à la rotation du dipôle autour de l'axe Oz. Étudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre stable.

Exercice 3: Quadrupôle électrostatique (⋆⋆)

Un quadrupôle électrostatique est une distribution de charges telle que le barycentre des charges négatives est confondu avec celui des charges positives.

Dans cet exercice, on considère 3 charges ponctuelles, alignées sur l'axe (Oz) :

- une charge $-2q$ placée en O,
- deux charges $+q$ placées en P_1 d'abscisse $z_1 = +d$ et en P_2 d'abscisse $z_2 = -d$.

Soit M un point de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) de centre O et d'axe (Oz), avec $\theta = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM})$.

1. Exprimer le potentiel $V(M)$ dans l'approximation dipolaire.

Exercice 4: Cristal de NaCl soumis à un champ (⋆⋆⋆)

L'application d'un champ électrique à un monocristal de chlorure de sodium se traduit par des déplacements des ions qui le composent. Soit $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u_x}$, le champ électrostatique imposé aux ions du cristal, par exemple en appliquant une tension à des électrodes planes plaquées sur les faces opposées d'un échantillon parallélépipédique. Sous l'effet de ce champ, les ions Na^+ se déplacent en bloc selon Ox de δ_+ et les ions Cl^- de δ_-, le centre de masse de l'ensemble restant immobile.
On posera $x = \delta_+ - \delta_-$. Avant tout déplacement le moment dipolaire global du cristal est nul par symétrie de la répartition.
On note N le nombre d'ions sodium et chlorure par unité de volume et e la valeur absolue de la charge de l'électron.

1. Montrer que ces déplacements ioniques se traduisent par un moment dipolaire réparti dans le volume du cristal, de densité volumique $\overrightarrow{P} = P\overrightarrow{u_x}$ et exprimer P en fonction de la charge élémentaire e, de x et du nombre N de paires d'ions Na^+Cl^- par unité de volume.
2. (a) L'expérience montre que la relation entre P et E est linéaire, de la forme $P = \epsilon_0\chi_{ion}E$ où χ_{ion} est un coefficient positif caractéristique du cristal. En déduire que le groupe d'ions Na^+ est soumis à des forces de rappel élastique dont la moyenne par ion est de la forme $\overrightarrow{f} = -Kx\overrightarrow{u_x}$, les ions Cl^- étant soumis à des forces opposées.

   (b) Exprimer la constante K en fonction de N, e, ϵ_0 et χ_{ion}.
3. (a) Après suppression du champ $\overrightarrow{E}$, les deux groupes d'ions évoluent librement. Écrire l'équation du mouvement d'un ion Na^+ et celle d'un ion Cl^- ; on désignera par m^+ et m^- leur masse respective.

   (b) Montrer que le mouvement relatif des deux ions est une oscillation à une pulsation $\omega_T = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0\chi_{ion}}}$. Pour cela, on fera les combinaison linéaires des équations du mouvement des deux ions qui permettent d'obtenir les équations vérifiées par : $x_G = \frac{m^+\delta_+ + m^-\delta_-}{m^+ + m^-}$ et par x.

Exercice 5: Dissolution du cuivre dans l'eau (⋆⋆⋆)

Nous étudions la dissolution d'ions cuivre (II) dans l'eau. Dans un modèle simplifié, l'ion cuivre Cu^{2+} est hydraté par quatre molécules d'eau placées aux sommets d'un carré de côté a, et centré sur le cation en O.

1. Représenter la molécule d'eau. On justifiera la géométrie à l'aide de la méthode VSEPR. Indiquer les charges partielles et représenter le moment dipolaire $\vec{p}$ de la molécule d'eau.
2. Exprimer le champ électrique $\vec{E}_{Cu^{2+}}(M)$ produit par l'ion Cu^{2+} en un point M de l'espace.

On veut exprimer l'énergie d'interaction du système constitué par l'ion Cu^{2+} et les quatre molécules d'eau. On suppose que le champ électrique, superposition des champs électriques produits par l'ion et les molécules d'eau, est dominé par le champ produit par l'ion Cu^{2+}.

3. Faire un schéma en représentant l'orientation des moments dipolaires de chaque molécule d'eau. On notera $A_1(a/2, a/2)$, $A_2(-a/2, a/2)$, $A_3(-a/2, -a/2)$, $A_4(a/2, -a/2)$ les positions de quatre molécules d'eau et $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ et $\vec{p}_4$ les moments dipolaires associés.

On rappelle l'expression du champ créé par un dipôle électrostatique $\vec{p} = p\vec{e}_z$ en coordonnées sphériques d'origine le dipôle :

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$$

4. Exprimer l'énergie d'interaction $U_{O\to A_1}$ entre l'ion Cu^{2+} et la molécule d'eau en A_1.
5. Exprimer l'énergie d'interaction $U_{A_1\to A_2}$ entre la molécule d'eau en A_1 et celle en A_2.
6. Exprimer l'énergie d'interaction $U_{A_1\to A_3}$ entre la molécule d'eau en A_1 et celle en A_3.
7. Exprimer U_{H_2O} l'énergie d'interaction entre les molécules d'eau, ainsi que U_{Cu^{2+}/H_2O} entre l'ion Cu^{2+} et les molécules d'eau.
8. Calculer l'énergie d'interaction U_{H_2O} et U_{Cu^{2+}/H_2O}. Commenter.

Données

- $p = 1{,}8\,\mathrm{D} = 6{,}0\times10^{-30}\,\mathrm{C\,m^{-1}}$
- $a = 3{,}0\times10^{-10}\,\mathrm{m}$
- $e = 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$
- $\epsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{F\,m}$
- $N_A = 6{,}02\times10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$

Exercice 6: Moment dipolaire magnétique terrestre (⋆)

La Terre de centre O et de rayon R_T, d'axe polaire $(O, \vec{e}_z)$ orienté du pôle Nord vers le pôle Sud, est supposée contenir en son centre un dipôle magnétique de moment dipolaire : $\vec{m} = m\vec{e}_z$. On repère un point M du globe terrestre par $r = R_T = 6371\,\mathrm{km}$, θ fixé, et ϕ quelconque. On donne, dans le cadre de l'approximation dipolaire, les composantes du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en M par le dipôle :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$$

1. Exprimer la latitude λ comptée depuis l'équateur (positivement dans l'hémisphère nord, et négativement dans l'hémisphère sud), en fonction de θ.

À Paris ($\lambda = 49\,°$), le champ magnétique terrestre $\vec{B}_T$ est vers le sol : il fait un angle $\alpha = 65\,°$ avec l'horizontale et sa composante horizontale est $B_h = 20\,\mu\mathrm{T}$.

2. Exprimer la composante verticale B_v du champ magnétique terrestre et la norme B_T du champ magnétique terrestre en fonction de B_h et α. Faire les applications numériques.
3. Déduire la valeur du moment dipolaire magnétique terrestre m.

Exercice 7: Oscillations d'une boussole (⋆)

Une boussole est animée de petites oscillations dues à un champ magnétique uniforme et constant, orthogonal à son axe de rotation. Suite à une modification du champ magnétique, la pulsation des oscillations a été multipliée par 5.

1. Comment a été modifié le champ magnétique ?

Exercice 8: Interaction entre deux moments magnétiques (⋆)

On donne le champ magnétique créé en un point P par un dipôle de moment $\overrightarrow{\mathscr{M}}$ placé en A :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left(3\overrightarrow{\mathscr{M}}.\overrightarrow{u_{AP}}\right)\overrightarrow{u_{AP}} - \overrightarrow{\mathscr{M}}}{AP^3} \qquad \text{où} \qquad \overrightarrow{u_{AP}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{AP}$$

Deux dipôles magnétiques de moments $\overrightarrow{\mathscr{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}_2}$ sont respectivement en O et M.

1. Exprimer l'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles en fonction de $\overrightarrow{\mathscr{M}_1}$, $\overrightarrow{\mathscr{M}_2}$, $\overrightarrow{OM}$ et OM.
2. On suppose que $\overrightarrow{\mathscr{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}_2}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{OM}$. Exprimer la force entre les dipôles. À quelle condition est-elle attractive ?

3. Même question : $\overrightarrow{\mathscr{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}_2}$ sont colinéaires entre eux et perpendiculaires à $\overrightarrow{OM}$.
4. Déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie d'interaction entre deux atomes possédant un moment magnétique.
   À quelle température cette énergie est-elle de l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique k_BT ? Conclure quant à l'origine microscopique des propriétés magnétiques de la matière.

Éléments de réponses :

Exercice 1

Q2 : $C = \dfrac{\alpha p^2}{16\pi^2\epsilon_0^2}\left(4\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)$

Exercice 2

Q1 : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_x$

Q4 : L'équation différentielle est $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{pE}{J}\sin\theta = 0$.
Autour de la position d'équilibre stable $\theta_e = 0$, le système évolue comme un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{pE}{J}}$.

Exercice 3

Q1 : $V(M) = \dfrac{qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$

Exercice 4

Q1 : $\vec{P} = Nex\overrightarrow{u_x}$

Q2 : $K = \dfrac{Ne^2}{\epsilon_0\chi_{\text{ion}}}$

Exercice 5

Q2 : $\vec{E}_{\text{Cu}^{2+}}(M) = \dfrac{2e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

Q4 : $U_{O\to A_1} = -\dfrac{ep}{\pi\epsilon_0 a^2}$

Q5 : $U_{A_1\to A_2} = \dfrac{3p^2}{8\pi\epsilon_0 a^3}$

Q6 : $U_{A_1\to A_3} = \dfrac{p^2}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^3}$

Q8 : $U_{\text{H}_2\text{O}} = 54\,\text{kJ mol}^{-1}$ et $U_{\text{Cu}^{2+}/\text{H}_2\text{O}} = -920\,\text{kJ mol}^{-1}$

Exercice 6

Q3 : $m = 7{,}9\times10^{22}\,\text{A m}^2$

Exercice 7

Q1 : Le champ a été multiplié par 25.

Exercice 8

Q2 : On expime la foce $\vec{F}_{1\to2} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{6\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2}{r^4}\vec{u}_r$.

Q3 : $\vec{F}_{1\to2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2}{r^4}\vec{u}_r$

Q4 : $U \approx 10^{-24}\,\text{J}$ soit une température $T \approx 0{,}6\,\text{K}$ telle que $U \approx k_BT$.