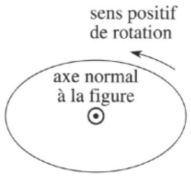
TD 8 : Magnétostatique

Exercice 1: Topographie (⋆)

1. L'axe normal au schéma est orienté positivement vers le lecteur, ce qui définit l'orientation d'une courbe fermée (ou contour) selon la règle du tire-bouchon.



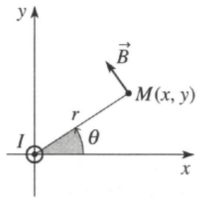
   — Les lignes de champ voisines du fil (1) sont orientées dans le sens positif : $B\,\mathrm{d}\ell$ est positif et la circulation $\mathcal{C} = \oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ est positive.
   D'après le théorème d'Ampère, $\mathcal{C} = \mu_0 I_1$ est donc I_1 est positif.
   — Pour la même raison, I_2 est négatif et I_3 est positif.
   — On applique le même raisonnement à une ligne de champ qui entoure les trois fils. Ces lignes de champ sont orientées dans le sens positif. La circulation, positive, est égale à $\mu_0(I_1+I_2+I_3)$. La somme $I_1+I_2+I_3$ est positive.

2. Le champ ayant une orientation déterminée en tout point, deux lignes de champ ne peuvent en général se croiser. Le vecteur nul n'ayant pas d'orientation définie, plusieurs lignes de champ peuvent aboutir en un point de champ nul. Les points A et A' sont des points de champ nul.

3. Le champ créé par un fil rectiligne infini est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

   ou encore $B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\sin\theta = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi r^2}$ et $B_y = \frac{\mu_0 I x}{2\pi r^2}$.
   On note x_1, x_2, x_3, r_1, r_2 et r_3 les valeurs de x et de r correspondant au point A lorsque l'origine est prise sur le fil 1, sur le fil 2 et sur le fil 3. L'ordonnée y de A est commune aux trois origines.



   Le champ est nul en A.
   Donc

$$B_x = -\frac{\mu_0 y}{2\pi}\left(\frac{I_1}{r_1^2}+\frac{I_2}{r_2^2}+\frac{I_3}{r_3^2}\right) = 0$$

   et

$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{x_1 I_1}{r_1^2}+\frac{x_2 I_2}{r_2^2}+\frac{x_3 I_3}{r_3^2}\right) = 0.$$

   Ces deux équations ont pour solutions :

$$I_1 = -I_2\frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{x_2-x_3}{x_1-x_3} \quad \text{et} \quad I_3 = -I_2\frac{r_3^2}{r_2^2}\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}.$$

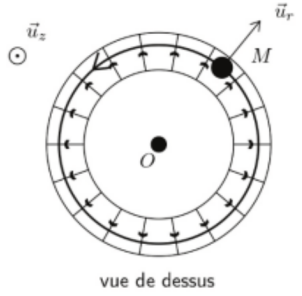
   Sur la carte du champ, on mesure : $x_1 = 18\,\mathrm{mm}, x_2 = 6\,\mathrm{mm}, x_3 = -30\,\mathrm{mm}; r_1 = 24\,\mathrm{mm}, r_2 = 16,5\,\mathrm{mm}, r_3 = 33,5\,\mathrm{mm}$.
   Avec ces valeurs :

$$\frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{x_2-x_3}{x_1-x_3} = 1,06 \quad \text{et} \quad \frac{r_3^2}{r_2^2}\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} = 2,06.$$

   Comme $I_2 = -1\,\mathrm{A}$, et compte tenu de la marge d'erreur sur les mesures de distances, $I_1 = 1\,\mathrm{A}$ et $I_3 \approx 2\,\mathrm{A}$.
   Une erreur de 1 mm sur une des distances entraine une erreur de l'ordre de 10% sur les intensités.

Exercice 2: Bobine torique (⋆)

1. On considère un point M repéré par ses coordonnées cylindriques. Sur le schéma, on a représenté $N = 18$ spires.



   — Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour les courants, sources du champ, donc $\vec{B}(M) \perp P$, c'est-à-dire $\vec{B}(M) // \vec{u}_\theta$.

— La distribution est invariante par rotation d'angle θ (puisqu'on a un grand nombre de spires régulièrement enroulées sur le tore), donc $\vec{B}$ aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ. Bilan :

$$\vec{B}(M) = B(r,z)\vec{u}_\theta$$

— Le contour d'Ampère Γ est un cercle orienté dans le sens trigonométrique d'axe Oz, de rayon r passant par M. Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\theta=0}^{2\pi} B(r,z)\vec{u}_\theta \cdot r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta = B(r)2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Il y a deux cas :

Si M est à l'intérieur de la bobine torique :

Sur le schéma ci-dessus, on a représenté un contour Γ qui enlace N spires. Le courant enlacé est donc : $I_{\text{enlacé}} = NI$. On en déduit que :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

Si M est à l'extérieur de la bobine torique :

Il n'y a pas de courant enlacé. On en déduit que :

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

2. Soit :

$$\Phi = N\varphi = N\iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \quad \text{avec} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\vec{S} = a\,\mathrm{d}r\vec{u}_\theta$$

On en déduit :

$$\Rightarrow \Phi = \frac{N\mu_0 NI}{2\pi} a\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

Or $\Phi = LI \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} a\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)}$

Exercice 3: Câble coaxial (⋆⋆)

1. La surface S s'appuyant sur le contour fermé orienté est elle-même orientée par rapport à l'orientation du contour, selon la règle de la main droite. La circulation du champ $\vec{B}$ sur le contour C est égale au flux du vecteur densité de courant $\vec{j}$ à travers la surface S multiplié par μ_0.

2. (a) Le plan contenant le point M et l'axe Oz est plan de symétrie de la distribution de courant donc le champ $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan : il est orthoradial.

   (b) La distribution de courant est invariante par translation selon Oz et par rotation d'axe Oz donc $\vec{B}$ ne dépend que de r.

   (c) Les lignes de champ sont donc des cercles d'axe Oz.

3. (a) On calcule la circulation du champ le long d'un cercle d'axe Oz et de rayon r orienté dans le sens positif par rapport à Oz, c'est-à-dire suivant $\vec{u}_\theta$. Avec ce qui précède, il vient :

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{B}(M)\cdot\vec{u}_\theta\,\mathrm{d}\ell = 2\pi r B(r).$$

   Si $r > R_3$, le courant enlacé par le contour est nul car égal à $I - I$. Le théorème d'Ampère donne alors $2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = 0$ et donc $B = 0$.

   (b) L'intérêt d'un câble coaxial par rapport à un câble normal est la nullité du champ à l'extérieur donc pas de parasites induits sur le reste du circuit.

4. L'intensité est le flux du vecteur densité de courant à travers la section du conducteur. Pour $r < R_1$, on a en norme $I = j_1\pi R_1^2$ et pour $R_2 < r < R_3$, toujours en norme $I = j_2\pi(R_3^2 - R_2^2)$. Soient alors les orientations : $\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi R_1^2}\vec{u}_z$ et $\vec{j}_2 = -\frac{I}{\pi(R_3^2-R_2^2)}\vec{u}_z$.

5. Comme précédemment, on prend comme contour des cercles de rayon r et d'axe Oz, orientés dans le sens positif par rapport à Oz, c'est-à-dire suivant $\vec{u}_\theta$. La circulation de $\vec{B}$ sur ces contours est $2\pi r B$.

   On doit maintenant calculer le flux de $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$ à travers la surface du contour :

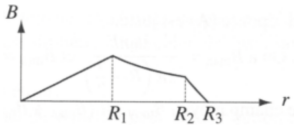
   — (a) pour $r < R_1$, $I_{\text{enlacé}} = j_1\pi r^2$ soit $B = \frac{\mu_0 j_1 r}{2}$.

   — (b) $R_1 < r < R_2$, $I_{\text{enlacé}} = j_1\pi R_1^2$ soit $B = \frac{\mu_0 j_1 R_1^2}{2r}$.

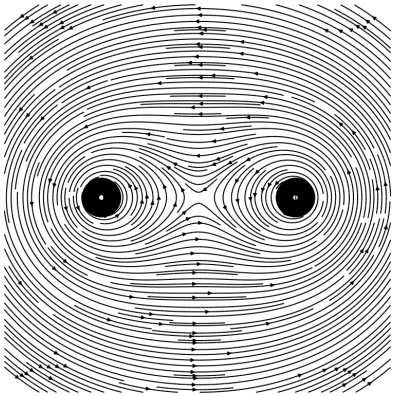
   — (c) $R_2 < r < R_3$, $I_{\text{enlacé}} = j_1\pi R_1^2 - j_2\pi(r^2 - R_2^2)$ soit $B = \frac{\mu_0 j_1 R_1^2}{2r} - \frac{\mu_0 j_2(r^2-R_2^2)}{2r}$.

6. La vérification de la continuité est immédiate.

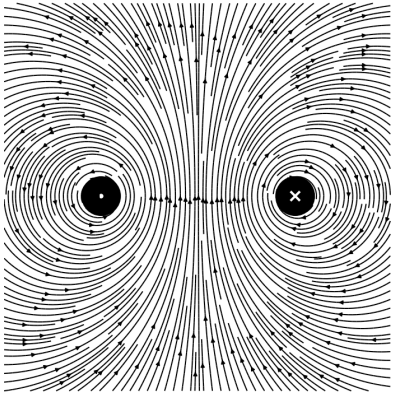
7. La courbe $B(r)$ est tracée sur la figure ci-dessous.



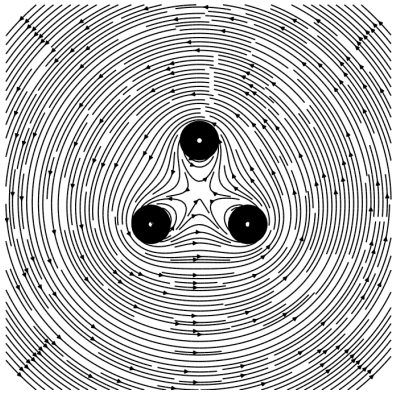
Exercice 4: Cartes de champ magnétostatique (⋆)

1. 

— Le plan médiateur est un plan de symétrie.
— Le plan contenant les deux fils est un plan de symétrie.
— Point de champ nul en $d/2$ (par symétrie).
— À proximité des fils, on retrouve les lignes de champ circulaires, comme pour un fil unique.
— A grande distance, les lignes de champ deviennent circulaires comme pour un fil unique (les 2 fils semblent n'en former qu'un seul).

2. 

— Le plan médiateur est un plan d'antisymétrie pour les courant donc un plan de symétrie pour les lignes de champ.
— Le plan contenant les deux fils est un plan de symétrie.
— À proximité des fils, on retrouve les lignes de champ circulaires, comme pour un fil unique.

3. 

— Les 3 plans médiateurs de deux fils contenant le troisième sont des plans de symétrie.
— À proximité des fils, on retrouve les lignes de champ circulaires, comme pour un fil unique.
— Point de champ nul au centre (par symétrie).
— A grande distance, les lignes de champ deviennent circulaires comme pour un fil unique (les 2 fils semblent n'en former qu'un seul).

Exercice 5: Champ créé par un faisceau cylindrique d'électrons (⋆)

1. Il y a n électrons de charge $-e$, soit une charge totale $(-n\,e)$ par unité de volume. La densité volumique de charge est $\rho = -n\,e$.
   Le vecteur densité volumique de courant est tel que $\vec{j} = \rho_m\,\vec{v}$, où ρ_m est la densité volumique de charge mobile et $\vec{v}$ la vitesse moyenne des porteurs de charge.
   Dans le problème étudié, $\rho_m = \rho = -n\,e$ et donc $\vec{j} = -n\,e\,\vec{v}$.
2. Pour une répartition de charges à symétrie cylindrique, $\vec{E}$ est de la forme $\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r$. On détermine $E(r)$ par le théorème de Gauss appliqué à un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h quelconque. On obtient :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{n\,e\,R^2}{2\epsilon_0\,r}\,\vec{e}_r \quad \text{si } r > R \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{n\,e\,r}{2\epsilon_0}\,\vec{e}_r \quad \text{si } r < R}$$

3. Pour une répartition de courants à symétrie cylindrique, $\vec{B}$ est de la forme $\vec{B} = B(r)\,\vec{e}_\theta$. On détermine $B(r)$ par le théorème d'Ampère appliqué à une ligne de champ circulaire de rayon r. On obtient :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0\,n\,e\,v\,R^2}{2\,r}\,\vec{e}_\theta \quad \text{si } r > R$$

et

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0\, n\, e\, v\, r}{2}\,\vec{e}_\theta \quad \text{si } r < R$$

On remarque que, dans les deux cas :

$$\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\,\vec{v}\wedge\vec{E}$$

4. Un électron, à une distance r de l'axe ($r < R$!) est soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = -e\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)$$

Avec les expressions trouvées de $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

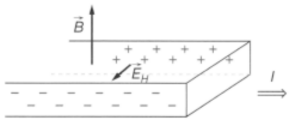
$$\vec{F} = \frac{n\, e^2\, r}{2\epsilon_0}\left(1 - \epsilon_0\mu_0\, v^2\right)\vec{e}_r$$

Or, $\epsilon_0\mu_0$ et la vitesse de la lumière dans le vide sont liés par $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$. On en déduit :

$$\vec{F} = \frac{n\, e^2\, r}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\vec{e}_r$$

Pour une particule matérielle, v est inférieure à c ; la force est donc dirigée vers l'extérieur. Sous l'effet de son propre champ électromagnétique, un faisceau électronique initialement parallèle tend à diverger.

Exercice 6: Effet Hall (⋆⋆)

1. 

Lors de l'établissement du courant, les électrons mis en mouvement selon $-\vec{u}_x$ (leur charge est négative) sont déviés par le terme $-e\vec{v}\wedge\vec{B}$ de la force de Lorentz. Il apparaît donc un excès de charges négatives sur une face latérale et, du fait de la neutralité du conducteur, un excès de charges positives sur la face opposée. Le champ électrique créé dans le ruban est donc dirigé de la face chargée positivement vers l'autre face.

2. En régime permanent, les électrons ont une vitesse $\vec{v}$ dirigée selon $-\vec{u}_x$. On en déduit que le terme magnétique de la force de Lorentz $-e\vec{v}\wedge\vec{B}$ est compensé par le terme électrique dû au champ transversal : $-e\vec{E}_H$. Ainsi, $\vec{E}_H = -\vec{v}\wedge\vec{B}$.
Or, la densité de courant s'écrit $\vec{j} = -ne\vec{v}$, avec $\vec{j} = \frac{I}{\ell h}\vec{u}_x$. On en déduit l'expression du champ de Hall :

$$\vec{E}_H = \frac{-IB}{ne\ell h}\vec{u}_y.$$

3. La densité volumique de charge fixe s'écrit $\rho = ne$; on en déduit l'expression de la force volumique subie par les ions fixes du fait de la présence de $\vec{E}_H$: $\mathrm{d}\vec{F} = ne\vec{E}_H\mathrm{d}\tau$. D'après ce qui précède :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{-IB}{\ell h}\vec{u}_y = \vec{j}\wedge\vec{B}.$$

Pour un élément de longueur $\mathrm{d}\vec{L} = \mathrm{d}L\vec{u}_x$ de ruban, la force élémentaire s'écrit :

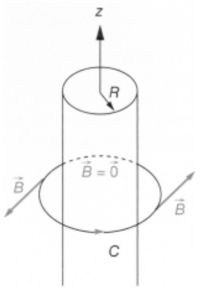
$$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{j}\wedge\vec{B}\ell\, h\,\mathrm{d}L = I\mathrm{d}\vec{L}\wedge\vec{B}.$$

Remarque – Pour des rubans très minces et des milieux semi-conducteurs présentant très peu de porteurs de charges, la différence de potentiel due à $\vec{E}_H$ est mesurable.

Exercice 7: Modèles de fils (⋆⋆⋆)

1. Tout plan contenant M et l'axe $z'Oz$ est plan de symétrie pour les courants, donc d'antisymétrie pour le champ magnétique. $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan : il est orthoradial. Par ailleurs, l'invariance par translation le long de l'axe $z'Oz$ et par rotation autour de cet axe assure que $\vec{B}(M)$ doit être cherché sous la forme $B(r)\,\vec{u}_\theta$.
L'application du théorème d'Ampère pour un cercle d'axe $z'Oz$ et de rayon r donne :
   - $r < R$, $\quad \vec{B} = \frac{\mu_0 rI}{2\pi R^2}\,\vec{u}_\theta$;
   - $r > R$, $\quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta$.

2. Dans le modèle d'une conduction sur la surface cylindrique, les symétries et les invariances ne sont pas modifiées, on reprend donc la même forme pour le champ, à savoir $B(r)\,\vec{u}_\theta$.
Le contour d'Ampère reste le même, un cercle d'axe Oz. Lorsque le cercle est situé à l'intérieur du cylindre de rayon R, l'intensité enlacée est nulle, si bien que le champ magnétique est nul. À l'extérieur du fil en revanche, l'intensité enlacée est égale à I et le champ retrouve la valeur obtenue précédemment (Figure) :
   - $r \leq R$, $\quad \vec{B} = \vec{0}$;
   - $r \geq R$, $\quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta$.



Remarque – Une discontinuité apparaît cette fois pour la valeur $r = R$; elle est due à un modèle de conduction surfacique.

3. Le système étudié ici n'a plus les symétries et invariances requises pour une utilisation directe du théorème d'Ampère. On peut toutefois procéder par superposition : en effet, on peut considérer :
   — le champ $\vec{B}_1$ créé par le fil sans cavité parcouru par une densité volumique uniforme $\vec{j}$;
   — le champ $\vec{B}_2$ engendré par une distribution uniforme de densité $-\vec{j}$ occupant l'emplacement de la cavité.

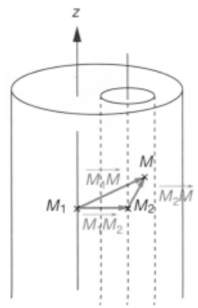
   La superposition de ces champs correspond à $\vec{B}$. Si l'on considère un point M situé dans la cavité, on définit ses projections orthogonales M_1 et M_2 respectivement sur l'axe Oz et sur l'axe de la cavité. La résolution du cours permet d'écrire : $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 rI}{2\pi R^2}\,\vec{u}_\theta = \frac{\mu_0}{2}\,\vec{j} \wedge \overrightarrow{M_1M}$.
   Par analogie, puisque M est dans la cavité,

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2}(-\vec{j}) \wedge \overrightarrow{M_2M}.$$

   En sommant ces champs, on aboutit au résultat :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\,\vec{j} \wedge (\overrightarrow{M_1M} - \overrightarrow{M_2M}) = \frac{\mu_0}{2}\,\vec{j} \wedge \overrightarrow{M_1M_2}.$$

   La figure suivante représente cette construction.
   Le résultat est indépendant du point considéré dans la cavité : le champ y est donc uniforme.



Exercice 8: Champ créé par une nappe de courant (⋆⋆)

1. **Propriétés du champ**

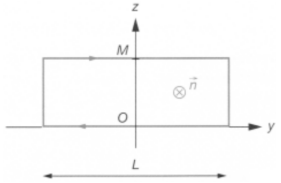
   (a) L'invariance par translation selon Ox ou selon Oy (et plus généralement toute direction perpendiculaire à Oz) invite à raisonner en coordonnées cartésiennes.
   Le champ magnétique ne dépend que de la cote z.

   (b) Où que se trouve le point M, le plan xMz (parallèle à xOz et passant par M) est un plan de symétrie pour la distribution de courants, c'est donc un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique. On peut affirmer que le champ magnétique est dirigé selon $\vec{u}_y$ en tout point.

   (c) Le plan xOy est également un plan de symétrie pour la distribution de courants, ce qui impose qu'en tout point de ce plan le champ soit dirigé selon $\vec{u}_z$. Seul le champ nul peut vérifier les deux propriétés (être colinéaire à $\vec{u}_y$ et à $\vec{u}_z$). Le champ est donc nul en tout point du plan xOy.

2. **Expressions du champ**

   (a) L'étude conduite à l'exercice précédent a montré que le champ magnétique a pour expression $\vec{B}(M) = B(z)\,\vec{u}_y$, où $B(z)$ est une fonction de la seule variable z, valeurs interdites. La nullité du champ sur le plan xOy se traduit par $B(0) = 0$.
   Pour tenir compte de la direction du champ, ainsi que de sa valeur nulle sur le plan xOy, on choisit un contour d'Ampère sous la forme d'un rectangle (Fig. 35) :
   — dont l'un des côtés est dans le plan xOy, parallèle à Oy et mesurant L ;
   — deux côtés sont parallèles à Oz ;
   — le dernier côté est à la cote z.



   Sur ce contour noté C, le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(z)L = \mu_0 I_e,$$

   car seule la circulation sur le côté situé à la cote z n'est pas nulle (le champ à l'origine O est nul).

   (b) Selon la valeur de z, l'expression de l'intensité enlacée diffère :

— pour $z > a/2$, le flux de $\vec{j}$ à travers le rectangle est $I_e = -jL\,\frac{a}{2}$; le signe $-$ provenant de l'orientation de la normale, par la règle du tire-bouchon de Maxwell ;

— pour $0 < z \leq a/2$, en revanche le flux de $\vec{j}$ s'écrit $I_e = -jL\,z$.

On déduit donc l'expression du champ magnétique créé par la nappe de courant pour un point de cote z positive :

— $B_y = -\mu_0 j\frac{a}{2}$, pour $z > \frac{a}{2}$,

— $B_y = -\mu_0 jz$, pour $0 < z \leq \frac{a}{2}$.

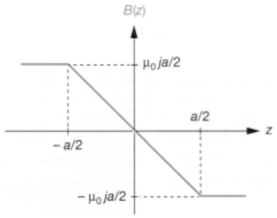
(c) L'expression valable pour les points de cote z négative doit tenir compte de l'antisymétrie du champ magnétique vis-à-vis du plan xOy ; le sens du champ à la cote $-z$ est donc l'opposé de celui du champ à la cote z. La fonction $B_y = f(z)$ est donc impaire.

Le graphe (Fig. 36) met en évidence les propriétés attendues :

— nullité en 0 et impaire ;

— évolution linéaire dans l'intervalle $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$;

— constance en dehors de l'espace interplans.



3. Le courant doit être le même pour la modélisation volumique ou surfacique de courant :

$$\mathrm{d}I = \int_0^{\mathrm{d}\ell} \mathrm{d}y \int_{-a/2}^{a/2} j\mathrm{d}z = \int_0^{\mathrm{d}\ell} j_s \mathrm{d}y$$

On en déduit

$$\boxed{\vec{j}_s = ja\vec{u}_x}$$

On a alors

$$\vec{B} = \begin{cases} -\mu_0 j_s/2\,\vec{u}_y & \text{si} \quad z > a/2 \\ \mu_0 j_s/2\,\vec{u}_y & \text{si} \quad z < -a/2 \end{cases}$$

Le champ est discontinu à la traversée de la nappe de courant.

Soit $\vec{B}_1 = \vec{B}(z > a/2)$ et $\vec{B}_2 = \vec{B}(z < -a/2)$, alors

$$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = -\mu_0 j_s \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{2\to 1} = \mu_0 j_s \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\mu_0 j_s \vec{u}_y$$

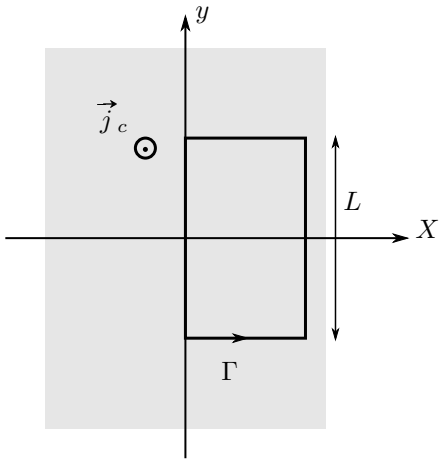
Donc la relation de passage est bien vérifiée.

Exercice 9: Modèle de Bean d'un supraconducteur (⋆⋆)

1. Le plan $(M, \vec{e}_X, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc c'est un plan d'anti-symétrie du champ magnétique. On en déduit $\vec{B}(M) = B_y(M)\vec{e}_y$.
La distribution de courant étant invariante par translation selon (Oy) et (Oz), on en déduit $\boxed{\vec{B}(M) = B_y(X)\vec{e}_y}$.

2. D'après la question précédente, $\vec{B}(X = 0) = B_y(X = 0)\vec{e}_y$.
De plus le plan $X = 0$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est orthogonal à ce plan : $\vec{B}(X = 0) = B_X(X = 0)\vec{e}_X$.
Le champ en un point du plan $X = 0$ ne pouvant être à la fois selon $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_X$, on en déduit qu'il est forcément nul.

3. On choisit comme contour d'Ampère Γ un rectangle de longueur L selon (Oy), compris entre $X = 0$ et $X > 0$.



La circulation sur ce contour donne

$$\oint_{M\in\Gamma} B_y(X)\vec{e}_y \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = B_y(X)L$$

Pour exprimer le courant enlacé, on distingue deux cas :

— si $X < \delta/2$, alors

$$I_e = J_c L X \quad \text{donc} \quad \vec{B}(0 < X < \delta/2) = \mu_0 J_c X \vec{e}_y$$

— si $X > \delta/2$, alors

$$I_e = J_c L \delta/2 \quad \text{donc} \quad \vec{B}(X > \delta/2) = \frac{\mu_0 J_c \delta}{2} \vec{e}_y$$

Le plan $X = 0$ étant un plan de symétrie de la distribution de courant, il s'agit d'un plan d'anti-symétrie du champ magnétique, donc $B_y(X)$ doit être une fonction impaire :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{B}(|X| \leq \delta/2) = \mu_0 J_c X \vec{e}_y \\ \vec{B}(|X| > \delta/2) = \dfrac{X}{|X|} \times \dfrac{\mu_0 J_c \delta}{2} \vec{e}_y \end{cases}}$$

4. Par principe de superposition, le champ dans le supraconducteur est la somme
   — du champ produit par $\vec{j}_c = J_c \vec{e}_z$ entre $a - \delta$ et a : $\vec{B}_1 = -\dfrac{\mu_0 J_c \delta}{2} \vec{e}_y$;
   — du champ produit par $\vec{j}'_c = -J_c \vec{e}_z$ entre $-a$ et $-a + \delta$: $\vec{B}_2 = -\dfrac{\mu_0 J_c \delta}{2} \vec{e}_y$;
   — du champ extérieur $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$.

   On en déduit :

$$B_0 - \mu_0 J_c \delta = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta = \frac{B_0}{\mu_0 J_c}}$$

5. On utilise le principe de superposition. Pour $|x| > a$, on a $||\vec{B}|| = B_0$ car $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{0}$ en dehors du supraconducteur.
   Pour $x \in [a - \delta, a]$,

$$\vec{B}_1 = \mu_0 J_c \left(x - (a - \delta/2)\right) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 J_c \delta}{2} \vec{e}_y$$

   On en déduit

$$\vec{B}(x \in [a - \delta, a]) = \left(B_0 + \mu_0 J_c (x - a)\right) \vec{e}_y$$

   Pour $x \in [-(a - \delta), (a - \delta)]$, $\vec{B} = \vec{0}$.
   Pour $x \in [-a, -(a - \delta)]$,

$$\vec{B}_2 = -\mu_0 J_c \left(x - (-a + \delta/2)\right) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 J_c \delta}{2} \vec{e}_y$$

   On en déduit

$$\vec{B}(x \in [-a, -(a - \delta)]) = \left(B_0 - \mu_0 J_c (x + a)\right) \vec{e}_y$$

