TD 9 : Dipôles électrique et magnétique

Exercice 1: Interaction entre deux dipôles (⋆)

1. Voir le cours pour la démonstration :

$$V(M) = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos(\theta)\vec{e}_r + \sin(\theta)\vec{e}_\theta\right)$$

2. L'énergie d'interaction est l'énergie potentielle exercée par le dipôle $\vec{p}$ sur $\vec{p}'$:

$$U = -\vec{p}' \cdot \vec{E}(M) \quad \text{avec} \quad \vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos(\theta)\vec{e}_r + \sin(\theta)\vec{e}_\theta\right)$$

Or $\vec{p}' = \alpha\vec{E}(M)$, donc

$$U = -\alpha E^2 = -\frac{\alpha p^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 r^6}\left(4\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) = -\frac{C}{r^6}$$

$$\text{avec} \quad \boxed{C = \frac{\alpha p^2}{16\pi^2\epsilon_0^2}\left(4\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)}$$

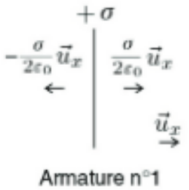
La constante C ne dépend pas de l'orientation relative des deux dipôles. $\vec{p}'$ s'aligne avec le champ $\vec{E}(M)$ produit par le dipôle $\vec{p}$.

Exercice 2: Dipôle électrostatique et condensateur plan (⋆⋆)

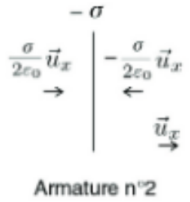
1. On applique le théorème de superposition pour calculer le champ créé par les deux armatures qui sont assimilées à des plans infinis situés en $x = 0$ et $x = e$.

Distribution D_1 : armature de charge Q et de densité surfacique de charges $+\sigma$

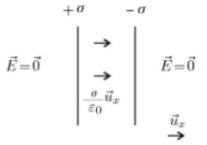
On a vu dans l'exercice sur le condensateur plan que la norme du champ électrostatique créé par un plan infini est $\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$. Comme le champ diverge à partir des charges positives, on en déduit le champ dans les deux régions de l'espace.



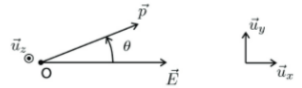
Distribution D_2 : armature de charge $-Q$ et de densité surfacique de charges $-\sigma$



Distribution D (condensateur) : armature $n°1$ de charge Q, de densité surfacique de charges $+\sigma$ située en $x = 0$ et armature $n°2$ de charge $-Q$, de densité surfacique de charges $-\sigma$ située en $x = e$.



Le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur. Dans le condensateur, le champ vaut $\boxed{\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_x}$.

2. 

Il y a deux méthodes pour étudier l'équilibre :

Première méthode : utilisation du moment des forces

Le moment des forces est $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} = -pE\sin\theta\,\vec{u}_z$.

À l'équilibre, $\vec{\Gamma} = \vec{0}$.

Il y a deux positions d'équilibre : $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, c'est-à-dire $\vec{p}$ et $\vec{E}$ colinéaires.

Deuxième méthode : utilisation de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle du dipôle est : $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos\theta$.

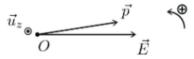
L'énergie potentielle est extrémale à l'équilibre. On retrouve bien les deux positions d'équilibre : $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

3. L'équilibre est stable si en écartant le système de sa position d'équilibre, les actions mécaniques ont tendance à le ramener vers sa position d'équilibre. L'équilibre est instable si en écartant le système de sa position d'équilibre, les actions mécaniques ont tendance à l'écarter de sa position d'équilibre.

Il y a deux méthodes pour étudier l'équilibre :

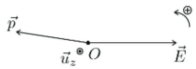
Première méthode : utilisation du moment des forces

- On écarte le dipôle de la position d'équilibre $\theta = 0$.



Sur le schéma représenté ci-dessus, $\theta > 0$ et $\Gamma_z < 0$: le couple a tendance à le faire tourner dans le sens horaire (règle de la main droite). Si on écarte le dipôle dans l'autre sens ($\theta < 0$) de sa position d'équilibre, on montre de la même façon que le couple a tendance à le faire tourner dans le sens trigonométrique et à le ramener vers sa position d'équilibre. La position $\theta = 0$ est donc un équilibre stable. Le dipôle va s'aligner dans le même sens que le champ extérieur.

• On écarte le dipôle de la position d'équilibre $\theta = \pi$.



$\Gamma_z < 0$, le couple a tendance à le faire tourner dans le sens horaire (règle de la main droite). La position $\theta = \pi$ est donc un équilibre instable.

Deuxième méthode : utilisation de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle est égale à $E_p = -pE\cos\theta$. L'équilibre est stable si l'énergie potentielle est minimale, c'est-à-dire pour $\theta = 0$. L'équilibre est instable si l'énergie potentielle est maximale, c'est-à-dire pour $\theta = \pi$.

4. Il y a deux méthodes pour obtenir l'équation différentielle du mouvement.

Première méthode : utilisation du théorème du moment cinétique

On écrit le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel $\mathcal{R} = (O; \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z}, t)$ galiléen :

On en déduit :

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \Gamma_z = -pE\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{pE}{J}\sin\theta = 0}$$

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Comme on a un système conservatif à une dimension, l'énergie mécanique se conserve.

On obtient directement l'équation différentielle en écrivant que $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'énergie mécanique est égale à : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}J\omega^2 - pE\cos\theta$.

Comme $\omega = \dot{\theta}$, alors $E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - pE\cos\theta$.

On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = J\dot{\theta}\ddot{\theta} + pE\dot{\theta}\sin\theta$$

En simplifiant par $\dot{\theta}$, on en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{pE}{J}\sin\theta = 0$$

Dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre $\theta \ll 1$, on peut effectuer un développement limité de $\sin\theta$ au premier ordre. On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{pE}{J}\theta = 0$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique.

On définit la pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{pE}{J}}}$.

La solution est de la forme : $\theta = \theta_m\cos(\omega_0 t + \phi)$ ou de la forme $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. La deuxième forme est plus pratique à utiliser avec les conditions initiales.

Exercice 3: Quadrupôle électrostatique (⋆⋆)

1. Par le principe de superposition :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 P_1 M} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 P_2 M} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 OM}$$

avec

$$P_1M^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta) \quad \text{et} \quad P_2M^2 = r^2 + d^2 + 2rd\cos(\theta)$$

Dans l'approximation dipolaire, $r \gg d$. On effectue un DL à l'ordre 2 en d/r :

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_1M} &= \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{d}{r}\right)^2 - 2\frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{d}{r}\cos\theta\right)^2 + o\left(\left(\frac{d}{r}\right)^2\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_2M} &= \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2\frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{d}{r}\cos\theta\right)^2 + o\left(\left(\frac{d}{r}\right)^2\right)\right)\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\boxed{V(M) = \frac{qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)}$$

On obtient une décroissance du potentiel en $1/r^3$, soit une décroissance plus rapide que pour un dipôle électrostatique.

Exercice 4: Cristal de NaCl soumis à un champ (⋆⋆⋆)

1. Le moment dipolaire global est nul avant le déplacement. Après le déplacement, la variation du moment dipolaire pour une paire d'ions est : $\mathrm{d}\vec{p} = (e\delta_+ - e\delta_-)\vec{u_x} = ex\vec{u_x}$, donc globalement $\boxed{\vec{P} = Nex\vec{u_x}}$.

2. (a) À la position d'équilibre, un ion sodium est soumis à deux forces : la force électrique et une autre force f qui l'empêche de s'éloigner davantage (force de rappel).

   (b) La relation d'équilibre projetée sur O_x entraîne :

$$0 = eE + f \Rightarrow f = -eE = -\frac{eP}{\epsilon_0\chi_{\text{ion}}} = -\frac{Ne^2}{\epsilon_0\chi_{\text{ion}}}x.$$

   On en déduit $\boxed{K = \frac{Ne^2}{\epsilon_0\chi_{\text{ion}}}}$.

3. (a) La projection de la relation fondamentale de la dynamique en absence de champ pour les deux ions donne :

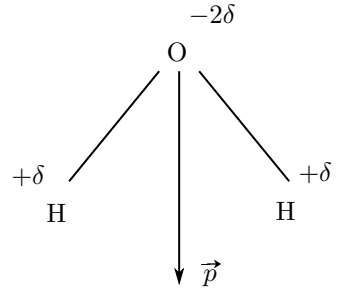
$$\begin{cases} m_+\ddot{\delta}_+ = -Kx = -K(\delta_+ - \delta_-) \\ m_-\ddot{\delta}_- = Kx = -K(\delta_- - \delta_+) \end{cases}$$

   (b) La somme des deux équations entraîne $m_+\ddot{\delta}_+ + m_-\ddot{\delta}_- = 0$, ce qui prouve que le mouvement du centre de gravité de l'ensemble est une translation uniforme (ou qu'il est immobile). Pour avoir le mouvement relatif des ions par rapport au centre de gravité, on peut combiner les deux équations en divisant la première par m_+ et en soustrayant la seconde divisée par m_-, ce qui donne : $\ddot{x} = -\frac{K}{m}x \Rightarrow \ddot{x} + \omega_T^2 x = 0$, où $\omega_T = \sqrt{\frac{K}{m}}$ avec $m = \frac{m_+m_-}{m_+ + m_-}$.

   Finalement : $\boxed{\omega_T = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0\chi_{\text{ion}}}}}$.

Exercice 5: Dissolution du cuivre dans l'eau (⋆⋆⋆)

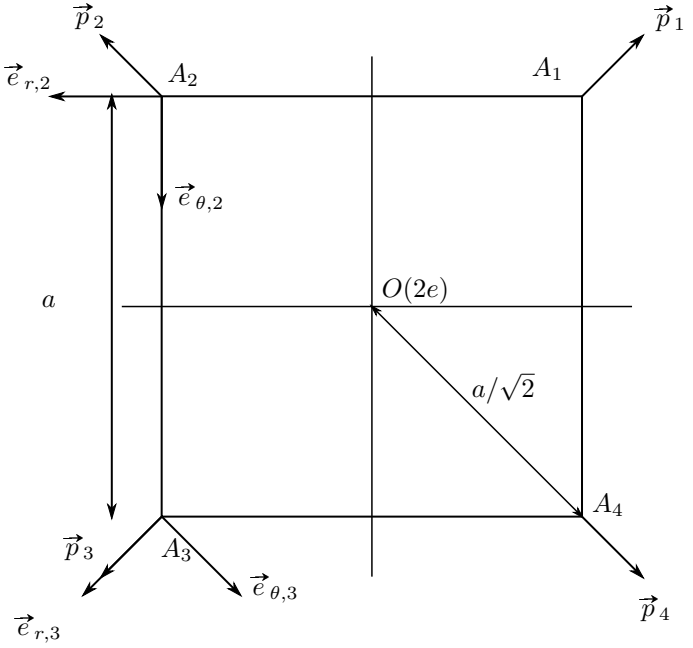
1. D'après la méthode VSEPR, autour de l'oxygène on a AX_2E_2, soit une figure de répulsion tétraédrique et une géométrie coudée.



2. Il s'agit du champ électrique produit par une charge ponctuelle $q = 2e$:

$$\vec{E}_{\text{Cu}^{2+}}(M) = \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \quad \text{et} \quad r = OM$$

3. Les dipôles électrostatiques vont s'aligner avec le champ produit par l'ion Cu^{2+}.



4. C'est l'énergie d'interaction d'un dipôle $\vec{p}_1$ placé dans un champ extérieur $\vec{E}_{Cu^{2+}}(A_1)$, donc

$$U_{O\to A_1} = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_{Cu^{2+}}(A_1)$$

Comme $\vec{p}_1$ est aligné dans le même sens que le champ et que $r = a/\sqrt{2}$ alors

$$\boxed{U_{O\to A_1} = -\frac{ep}{\pi\epsilon_0 a^2}}$$

5. C'est l'énergie d'interaction d'un dipôle $\vec{p}_2$ placé dans un champ électrique extérieur produit par le dipôle en A_1. On a $\theta = 3\pi/4$,

$$\vec{p}_2 = \frac{p}{\sqrt{2}}(\vec{e}_{r,2} - \vec{e}_{\theta,2}) \quad \text{et} \quad r = a$$

$$\text{donc} \quad U_{A_1\to A_2} = -\vec{p}_2\cdot\vec{E}_1(A_2) = -\frac{p}{\sqrt{2}}(\vec{e}_{r,2}-\vec{e}_{\theta,2})\cdot\frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\vec{e}_{r,2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_{\theta,2}\right)$$

On en déduit

$$\boxed{U_{A_1\to A_2} = \frac{3p^2}{8\pi\epsilon_0 a^3}}$$

6. C'est l'énergie d'interaction d'un dipôle $\vec{p}_3$ placé dans un champ électrique extérieur produit par le dipôle en A_1. On a $\theta = \pi$,

$$\vec{p}_3 = p\vec{e}_{r,3} \quad \text{et} \quad r = a\sqrt{2}$$

$$\text{donc} \quad U_{A_1\to A_3} = -\vec{p}_3 \cdot \vec{E}_1(A_3) = -p\vec{e}_{r,3} \cdot \frac{p}{4\pi\epsilon_0 2\sqrt{2}a^3}(-2\vec{e}_{r,3})$$

On en déduit

$$\boxed{U_{A_1\to A_3} = \frac{p^2}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^3}}$$

7. Il faut compter 4 énergies d'interaction entre molécules voisines, et 2 entre molécules en diagonale donc

$$U_{H_2O} = \frac{2p^2}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^3} + \frac{4\times 3p^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_{H_2O} = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left(\sqrt{2}+6\right)}$$

Il faut compter 4 énergies d'interaction entre l'ion Cu^{2+} et les molécules d'eau donc

$$\boxed{U_{Cu^{2+}/H_2O} = -\frac{4ep}{\pi\epsilon_0 a^2}}$$

8.

$$U_{H_2O} = \frac{36\times 10^{-60}}{4\pi\times 8{,}85\times 10^{-12}\times 27\times 10^{-30}}(\sqrt{2}+6) = \frac{10^{-18}}{3\pi\times 8{,}85}(\sqrt{2}+6)$$

$$\text{soit} \quad \boxed{U_{H_2O} = 8{,}9\times 10^{-20}\,\text{J} = 54\,\text{kJ mol}^{-1}}$$

$$U_{Cu^{2+}/H_2O} = -\frac{4\times 1{,}6\times 10^{-19}\times 6\times 10^{-30}}{\pi\times 8{,}85\times 10^{-12}\times 9\times 10^{-20}} = -\frac{8\times 1{,}6\times 10^{-17}}{8{,}85\times 3\pi}$$

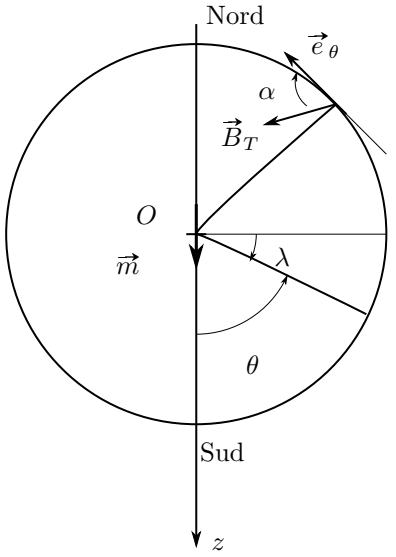
$$\text{soit} \quad \boxed{U_{Cu^{2+}/H_2O} = -1{,}5\times 10^{-18}\,\text{J} = -920\,\text{kJ mol}^{-1}}$$

On a un facteur 20 environ entre les AN, c'est donc l'interaction ion/eau qui domine dans l'interaction totale.

$$U_{tot} = U_{H_2O} + U_{Cu^{2+}/H_2O} = -870\,\text{kJ mol}^{-1} < 0$$

Exercice 6: Moment dipolaire magnétique terrestre (⋆)

1. $\boxed{\lambda = \theta - \pi/2}$



2. On a

$$B_h = B_T \cos(\alpha) \quad \text{donc} \quad \boxed{B_T = \frac{B_h}{\cos(\alpha)} = 4{,}7 \times 10^{-5}\,\text{T}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{B_v}{B_h} \quad \text{donc} \quad \boxed{B_v = B_h \tan(\alpha) = 4{,}3 \times 10^{-5}\,\text{T}}$$

3. D'après l'expression fournie,

$$B_h = \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi R_T^3} = \frac{\mu_0 m \sin(\lambda + \pi/2)}{4\pi R_T^3} = \frac{\mu_0 m \cos(\lambda)}{4\pi R_T^3}$$

On en déduit

$$\boxed{m = \frac{4\pi R_T^3 B_h}{\mu_0 \cos(\lambda)} = 7{,}9 \times 10^{22}\,\text{A m}^2}$$

Exercice 7: Oscillations d'une boussole (⋆)

1. On étudie l'aiguille aimantée d'une boussole assimilable à un solide de moment d'inertie J en rotation autour de l'axe vertical (Oz) dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

   L'aiguille est soumise
   - à l'action du poids de moment $M_{Oz}(\vec{P}) = 0$;
   - à l'action de la liaison pivot supposée parfaite donc $M_{Oz,\text{pivot}} = 0$;
   - à l'action du champ magnétique $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} = -mB\sin\theta\,\vec{e}_z$.

   Par application du théorème du moment cinétique scalaire, on a

$$J\ddot{\theta} + mB\sin\theta = 0$$

   On étudie le mouvement autour de la position d'équilibre stable $\theta_e = 0$, alors

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mB}{J}\theta = 0}$$

   On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mB}{J}}}$.

   Si on mesure une pulsation multipliée par 5, c'est que le champ a été multiplié par 25

Exercice 8: Interaction entre deux moments magnétiques (⋆)

1. L'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles est l'énergie potentielle d'un des deux dipôles dans le champ magnétique de l'autre :

$$E_p = -\vec{\mathscr{M}}_2 \cdot \vec{B}_1(M) = -\vec{\mathscr{M}}_1 \cdot \vec{B}_2(O)$$

   où $\vec{B}_i$ est le champ magnétique créé par $\vec{\mathscr{M}}_i$. En utilisant l'expression fournie du champ d'un dipôle, on obtient :

$$E_p = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{\mathscr{M}}_1 \cdot \vec{u}_r)(\vec{\mathscr{M}}_2 \cdot \vec{u}_r) - \vec{\mathscr{M}}_1 \cdot \vec{\mathscr{M}}_2}{r^3}$$

   où $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$ et $r = OM$.

2. Si les dipôles sont colinéaires à $\vec{u}_r$:

$$E_p = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2}{r^3} \quad \text{d'où} \quad \vec{F}_{1\to 2} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{6\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2}{r^4}\vec{u}_r$$

   L'interaction est attractive si $\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2 > 0$.

3. Si les dipôles sont colinéaires entre eux et perpendiculaires à $\vec{u}_r$:

$$E_p = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2}{r^3} \quad \text{d'où} \quad \vec{F}_{1\to 2} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2}{r^4}\vec{u}_r$$

   L'interaction est répulsive si $\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2 > 0$. L'expérience est très facile à faire avec des petits aimants.

4. Le moment magnétique des atomes est de l'ordre de grandeur du magnéton de Bohr, la distance entre deux atomes est de l'ordre de quelques dixièmes de nanomètres. L'énergie d'interaction est donc :

$$U \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu_B^2}{r^3} \simeq \frac{10^{-7} \times 10^{-46}}{(5 \times 10^{-10})^3} \simeq 8 \times 10^{-24}\,\text{J}.$$

   La température pour laquelle $U \sim k_B T$ est donc de l'ordre de $0,6\,\text{K}$: c'est extrêmement faible. Ce n'est pas l'interaction dipôle-dipôle qui est à l'origine du magnétisme de la matière.