TD 10 : Équations de Maxwell et énergie électromagnétique

Exercice 1: Manipulation des équations de Maxwell (⋆)

On suppose que règne dans l'espace le champ électromagnétique

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = f(z)\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_x \\ \vec{B}(M,t) = g(z)\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_y \end{cases}$$

où τ est une constante de temps et f, g deux fonctions que l'on cherche à déterminer. On suppose que l'espace est vide de charges et de courants.

1. Vérifier que la forme de ces deux champs est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.
2. En exploitant l'équation de Maxwell-Faraday, établir une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.
3. En exploitant l'équation de Maxwell-Ampère, établir une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.
4. En déduire une équation différentielle vérifiée par f. La résoudre en supposant que $\vec{E}(z=0,t=0) = E_0\,\vec{e}_x$ et que le champ électrique est nul en $z \to +\infty$ à tout instant.
5. En déduire l'expression du champ magnétique.

Exercice 2: Effet de striction des filets de courant (⋆⋆)

Deux fils parallèles parcourus par des courants de même sens s'attirent sous l'action des forces magnétiques. Le même effet d'attraction se manifeste entre les filets infinitésimaux de courant à l'intérieur d'un conducteur, modifiant ainsi la répartition de courant, usuellement supposée uniforme sur toute la section du fil.

On considère un conducteur cylindrique d'axe (Oz), de longueur infinie et de rayon a. Il contient n_0 charges positives q par unité de volume et n porteurs de charges mobiles, de charge $-q$, animés d'une vitesse $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{e_z}$ uniforme et stationnaire par rapport au conducteur, orientée selon l'axe du conducteur. On propose de déterminer la densité volumique non uniforme de porteurs de charges $n(r)$ en régime stationnaire.

Formulaire : en coordonnées cylindriques, de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$div\ \overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A_z)}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

1. Donner les expressions de la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ et de la densité volumique totale de charge ρ qui décrivent cette distribution. Vérifier l'équation locale de conservation de la charge électrique.
2. Écrire les équations fondamentales vérifiées par les champs électrique et magnétique en un point du faisceau de charges mobiles. On précisera l'orientation des champs électrique et magnétique en un point M à l'intérieur du conducteur.
3. En étudiant le mouvement d'un porteur de charge, de vitesse $\overrightarrow{v}$ uniforme et stationnaire, exprimer la densité volumique de porteurs de charges mobiles $n(r)$ dans le faisceau en fonction de n_0 et $\beta = \frac{v}{c}$. On utilisera le formulaire.
4. En écrivant la neutralité électrique d'une tranche dz de conducteur, montrer que l'expression de la densité $n(r)$ est non nulle seulement pour $r \leq b$. On exprimera b en fonction de a et β.
5. Application numérique : pour un fil de cuivre métallique, de section $S = 1,0\,mm^2$, parcouru par un courant d'intensité $I = 10\,A$, évaluer $a - b$. Commenter le résultat obtenu.
   Données : masse volumique du cuivre $\mu = 8,9.10^3\ kg.m^{-3}$; masse molaire $M = 64\ g.mol^{-1}$.
   On considérera que chaque atome de cuivre apporte un électron de conduction.

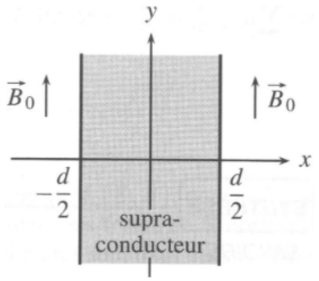
Exercice 3: Supraconducteur (⋆⋆)

Un supraconducteur a, entre autres, les caractéristiques suivantes : sa résistivité tombe à zéro et il expulse partiellement tout champ magnétique. La loi d'Ohm est alors remplacée par la loi de London :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{j} = -\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0\ell^2}$$

avec $\overrightarrow{B}$ le champ magnétique dans le supraconducteur, ℓ une constante telle que $\ell = \sqrt{m/(\mu_0 n e^2)}$ avec m la masse de l'électron, n la densité d'électrons supraconducteurs, $-e$ la charge de l'électron et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

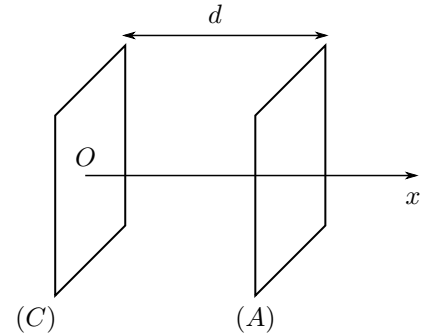
On étudie une lame supraconductrice à faces parallèles illimitées, d'épaisseur d, plongée dans un champ magnétique extérieur uniforme et constant $\overrightarrow{B_0}$, parallèle à ses faces.



1. Montrer que ℓ est homogène à une longueur.
2. Calculer ℓ pour $n = 10^{29} m^{-3}$.
3. Par quel vecteur, $\overrightarrow{B}$ est-il porté dans la plaque ? De quelle(s) variable(s) dépend-il ?
4. Quelle est l'équation sur $\overrightarrow{B}$ dans la lame ? On utilisera la formule d'analyse vectorielle :
$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B})) = \overrightarrow{grad}(div\,\overrightarrow{B}) - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{B}$$
5. Calculer $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{j}$ dans la lame supraconductrice (privilégier l'écriture de la solution avec des fonctions trigonométriques hyperboliques). On se place à une échelle telle que tous les courants sont volumiques, le champ magnétique est alors continu à l'interface entre le supraconducteur et le vide.
6. Représenter l'allure de $B(x)$ pour $d = 4\ell$ et $d = 20\ell$. En déduire à quelle condition sur d le champ magnétique moyen peut être considéré comme nul à l'intérieur du supraconducteur (effet Meissner).

Exercice 4: Diode à vide ($\star\star\star$)

Une diode à vide est constituée de deux plaques métalliques planes parallèles (C) et (A), de même surface S et distantes de d, entre lesquelles a été fait le vide. La cathode (C) est maintenue au potentiel nul. Elle émet des électrons de vitesse négligeable qui se dirigent vers l'anode (A) qui est portée au potentiel $U > 0$. On admet pour simplifier que les trajectoires des électrons sont rectilignes perpendiculaires aux plaques. On se place en régime permanent. L'intensité passant de (A) à (C) est appelée I.



On note $V(x)$ le potentiel électrostatique, $\rho(x)$ la densité volumique de charges et $v(x)$ la vitesse des électrons entre les plaques à la distance x de (C).

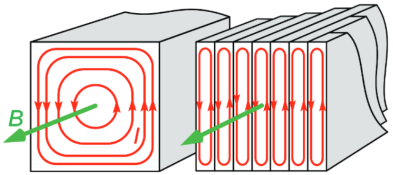
1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $v(x)$ en fonction du potentiel $V(x)$ et des caractéristiques d'un électron (masse m, charge $-e$.
2. Montrer que le produit $\rho(x)v(x)$ est constant et exprimer cette constante en fonction de I et S.
3. Exprimer $\rho(x)$ en fonction de $V(x)$, $\alpha = \dfrac{I}{S\epsilon_0}\sqrt{\dfrac{m}{2e}}$ et ϵ_0.
4. Écrire une équation différentielle vérifiée par $V(x)$.
5. On admet que le champ électrique est nul en $x = 0$. Intégrer une première fois l'équation précédente après l'avoir multipliée par $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ en fonction de $V(x)$.
6. En déduire I en fonction de U, pour $U > 0$. Que dire de I si $U < 0$?

Exercice 5: Courants de Foucault dans un cylindre ($\star\star$)

On place un cylindre conducteur d'axe Oz, de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur L et de conductivité γ dans un champ magnétique extérieur uniforme $\overrightarrow{B} = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$. On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique et on néglige les effets de bord.

On donne en coordonnées cylindriques :
$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r}\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

1. On admet que $\overrightarrow{E} = E(r,t)\overrightarrow{u_\theta}$. Montrer que :
$$\overrightarrow{E}(P) = \frac{r\omega B_0 \sin(\omega t)}{2}\overrightarrow{u_\theta}$$
2. Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.
3. Que devient la puissance moyenne dissipée par effet Joule si au lieu d'un seul conducteur cylindrique, on utilise N conducteurs cylindriques identiques, de même longueur L, de section $S_0' = \frac{S_0}{N}$ sachant que le volume total occupé par les N cylindres est le même que précédemment ? Expliquer l'intérêt du feuilletage (procédé qui consiste à diviser la section du noyau de fer en de multiples feuillets, pour la réalisation des transformateurs).



Exercice 6: Cylindre dans un four à induction (⋆⋆)

Un cylindre de rayon a, hauteur h et d'axe (Oz), constitué d'un métal ohmique de conductivité γ, est plongé dans un champ magnétique uniforme variable : $\overrightarrow{B} = B_0\cos(\omega t)\vec{e}_z$, où B_0 et ω sont des constantes. On suppose que le champ magnétique n'est pas modifié par la présence du cylindre.

1. Justifier l'existence d'un champ électrique à l'intérieur du cylindre de la forme $\overrightarrow{E} = E(r,z,t)\vec{e}_\theta$, en coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe (Oz). En appliquant l'équation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale à un cercle quelconque d'axe (Oz), déterminer $E(r,z,t)$. En déduire la densité de courant volumique dans le cylindre.
2. Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.
3. Trouver l'ordre de grandeur du champ magnétique créé par les courants qui se développent dans le cylindre. En déduire une condition pour que l'hypothèse faite dans l'énoncé soit valable.

Exercice 7: Décharge d'un conducteur dans l'air (⋆⋆)

Une boule conductrice, de centre O et de rayon R, porte initialement la charge Q_0 uniformément répartie sur sa surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité γ et initialement localement neutre : $\rho(M,t=0) = 0$ en tout point M à l'extérieur de la boule.

On cherche le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t))$ en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques de centre O.

1. Déterminer $\overrightarrow{E}(M,t=0)$ à l'extérieur de la boule.
2. Déterminer $\overrightarrow{B}(M,t)$ à l'extérieur de la boule.
3. En utilisant l'équation de Poynting, $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}\overrightarrow{\Pi} = -\vec{j}.\vec{E}$, trouver le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ à l'extérieur de la boule.
4. Montrer que $\rho(M,t) = 0$ à l'extérieur de la boule.
5. Déterminer la charge $Q(t)$ portée par la boule à l'instant t.
6. Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu entre les instants $t = 0$ et $t = \infty$. Commenter.

Formulaire : en coordonnée sphérique, pour un champ de vecteur $\vec{f} = f(r)\vec{e}_r$, la divergence s'exprime selon
$$\text{div}\,\vec{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 f(r)}{\partial r}$$

Exercice 8: Énergie magnétique dans une bobine (⋆)

Un solénoïde de longueur ℓ, de rayon a et d'axe (Oz), est constituée par un enroulement de n spires circulaires par unité de longueur. On utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini pour décrire cette bobine et l'on se placera dans le cadre de l'ARQP.

1. Quel est, dans ces conditions, le champ magnétique engendré par la bobine lorsqu'elle est parcourue par I ?
2. Quelle est l'énergie magnétique $\mathscr{E}_m$ associée à la bobine ? Quelle valeur du coefficient d'induction L de la bobine peut-on en déduire ? A.N : $I = 1\,\text{A}, \ell = 10\,\text{cm}, a = 10\,\text{cm}, n = 5000\,/\text{m}$.
3. La bobine est mise en charge par un générateur de fem e, de résistance interne R élevée. Quelle est la loi d'évolution du courant dans le circuit, fermé à l'instant $t = 0$?
4. Calculer les champs magnétiques et électriques engendrés par la bobine à l'instant t en tout point. Comparer les ordres de grandeur des densités volumiques d'énergies magnétique et électrique $(R = 10\,\text{k}\Omega)$.
5. Quelle est l'expression du flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant le volume où la bobine créé un champ non négligeable (cylindre de rayon a et de longueur ℓ) ? Interpréter le résultat.

Éléments de réponses :

Exercice 1

Q2 : $f'(z)\tau = g(z)$

Q3 : $g'(z)\tau c^2 = f(z)$

Q4 : $\vec{E}(M,t) = E_0 \exp\left(-\frac{1}{\tau}\left(t+\frac{z}{c}\right)\right)\vec{e}_x$

Q5 : $\vec{B}(M,t) = -\frac{E_0}{c}\exp\left(-\frac{1}{\tau}\left(t+\frac{z}{c}\right)\right)\vec{e}_y$

Exercice 2

Q1 : $\vec{j} = -n(r)q\vec{v}$ et $\rho = qn_0 - qn(r)$

Q3 : $n(r) = \frac{n_0}{1-\beta^2}$

Q4 : $b = a\sqrt{1-\beta^2}$

Q5 : $a - b \approx 1{,}8 \times 10^{-27}\,\mathrm{m}$

Exercice 3

Q3 : $\vec{B} = B(x)\vec{u}_y$

Q4 : $\vec{\Delta}\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\ell^2}$

Q5 : $\vec{B} = \frac{B_0\cosh\left(\frac{x}{\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{2\ell}\right)}\vec{u}_y$ et $\vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0\ell}\frac{\sinh\left(\frac{x}{\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{2\ell}\right)}\vec{u}_z$

Exercice 5

Q1 : $E_\theta = \frac{r}{2}B_0\omega\sin(\omega t)$

Q2 : $\langle P_J\rangle = \frac{\gamma B_0^2}{4}\pi L f^2 S_0^2$

Q3 : $\langle P'_J\rangle = \frac{\langle P_J\rangle}{N}$: la puissance est divisée par N, d'où l'intérêt du feuilletage pour la réalisation des transformateurs.

Exercice 6

Q1 : $\vec{j} = \frac{\gamma B_0\omega}{2}\sin(\omega t)\vec{e}_\theta$

Q2 : $< \mathcal{P}_J >= \frac{\pi}{16}\gamma B_0^2\omega^2 h a^4$

Q3 : Il faut $\gamma\mu_0 a^2\omega \ll 1$.

Exercice 7

Q1 : $\vec{E}(M,t=0) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

Q2 : $\vec{B}(M,t) = \vec{0}$

Q3 : $\vec{E}(r,t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}e^{-\frac{\gamma t}{\epsilon_0}}\vec{e}_r$

Q5 : $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma t}{\epsilon_0}}$

Q6 : $\mathcal{E}_J = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R} = -\Delta U_{em}$

Exercice 8

Q2 : $L = \mu_0 n^2\pi a^2\ell = 100\,\mathrm{mH}$

Q3 : $I(t) = \frac{e}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right), \quad \tau = \frac{L}{R}$

Q4 :

— Pour $r < a$: $\vec{B} = \mu_0 n\frac{e}{R}\vec{e}_z\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ et $E(r,t) = -\frac{r}{2}\mu_0 n\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$.

— Pour $r > a$: $\vec{B} = \vec{0}$ et $E(r,t) = -\frac{a^2}{2r}\mu_0 n\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$.

$\frac{\mathscr{E}_{\mathrm{E,vol}}}{\mathscr{E}_{\mathrm{B,vol}}} = 1{,}7\times10^{-5} \ll 1$