– Programme de colle n° 13 : du 06 au 10/01/25 –

Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.

Les exercices portent sur les séries entières (voir programme précédent). En deuxième exercice, on pourra poser un exercice sur les séries de fonctions (en particulier sur la dérivabilité de la somme).

– CHAPITRE 13 : INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE –

⚠ Cours uniquement.

I. INTÉGRATION SUR UN SEGMENT (RAPPELS).

Si f une fonction positive et continue sur $[a,b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f = 0$ si, et seulement si, f est identiquement nulle.

Théorème fondamental de l'analyse.

Théorème de la limite de la dérivée.

Sommes de Riemann, avec majoration de l'erreur dans le cas $\mathcal{C}^1$.

II. INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE.

Définition de l'intégrale sur un intervalle de la forme $[a,b[$ ou $]a,b]$.

Intégrales de référence :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \ln t\ \mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ \mathrm{d}t$$ ✎

Intégrale faussement impropre.

Linéarité de l'intégrale.

⚠ Comme pour les séries, il se peut que $\int_a^b (f+g)$ converge sans que les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent.
Positivité et croissance de l'intégrale.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ telle que f admette une limite $\ell \neq 0$ en $+\infty$. Alors, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge. ✎

⚠ L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ peut converger mais si f n'a pas de limite en $+\infty$. Cependant, si f a une limite en $+\infty$ celle-ci doit nécessairement être nulle pour quel 'intégrale converge.

III. INTÉGRALE IMPROPRE D'UNE FONCTION À VALEURS POSITIVES.

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ et positive, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est croissante sur $[a,b[$. Ainsi, l'intégrale $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement s'il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que : $\forall x \in [a,b[,\ \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant M$.

Soit f et g continues par morceaux sur $[a,b[$ avec g positive et telles que : $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$. Si l'intégrale $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.

Soit f et g continues par morceaux sur $[a,b[$ positives et telles que : $f \underset{b}{\sim} g$. Alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge si, et seulement si, $\int_a^b g$ converge.

Théorème de comparaison série-intégrale.

IV. Intégration par parties et changement de variables.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer sa valeur. ✎

En effectuant le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$. ✎

V. Intégrale absolument convergente et fonction intégrable.

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

Une fonction f est dite *intégrable sur* $[a,b[$ si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ et si $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente.

Inégalité triangulaire pour une fonction intégrable.

L'espace $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente. ✎

VI. Intégration des relations de comparaison.

Intégration des relations de comparaison - Cas convergent.

Équivalent du « reste » de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$. ✎

Intégration des relations de comparaison - Cas divergent.

Savoir déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de : $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$. ✎