– Programme de colle n° 14 : du 13 au 17/01 –

Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.

Les exercices portent sur les intégrales généralisées. En deuxième exercice, on pourra reposer un exercice sur les variables aléatoires. Les démonstrations à connaître sont indiquées par le symbole ✎

– CHAPITRE 20 –
THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE - INTÉGRALES À PARAMÈTRE

⚠ Cours uniquement.

⚠ Ces 5 théorèmes sont à connaître parfaitement :
- théorème de convergence dominée,
- théorème d'intégration terme à terme,
- théorème de continuité d'une intégrale à paramètre
- théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (version $\mathcal{C}^1$)
- théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (version $\mathcal{C}^k$).

I. THÉORÈMES DE CONVERGENCE DOMINÉE ET D'INTÉGRATION TERME À TERME.

I.1. Le théorème de convergence dominée.

Savoir montrer que (corrigé page suivante) :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u. \quad ✎$$

I.2. Le théorème d'intégration terme à terme.

Savoir montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}. \quad ✎$$

II. RÉGULARITÉ D'UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRE.

II.1. Continuité d'une intégrale à paramètre. ✎

Continuité de la fonction gamma d'Euler sur $\mathbb{R}_+^*$. ✎

II.2. Dérivabilité d'une intégrale à paramètre.

Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (version $\mathcal{C}^1$).
Savoir montrer que la fonction gamma d'Euler est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. ✎
Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (version $\mathcal{C}^k$).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, par :

$$f_n(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+u^2/n)^n} & \text{si } u \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On va utiliser le théorème de convergence dominée.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $u > 0$. On a :

$f_n(u) = \exp\big(-n\ln(1+u^2/n)\big)$ et $-n\ln(1+u^2/n)) \underset{+\infty}{\sim} -nu^2/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -u^2$.

Ainsi, par continuité de exp, on a $f_n(u) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-u^2}$ (valable également pour $u = 0$)

Ainsi (f_n) converge simplement vers $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. La fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in [0, \sqrt{n}]$, on a avec la formule du binôme :

$$\big(1+u^2/n\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{u^{2k}}{n^k} \geqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{u^2}{n} = 1 + u^2 > 0.$$

Ce qui permet d'établir l'hypothèse de domination : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [0, +\infty[\,,\ |f_n(u)| \leqslant \dfrac{1}{1+u^2}$.

Or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique et on obtient :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u.$$