– Programme de colle n° 12 : du 20 au 24/01 –

Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.
Les exercices portent sur les intégrales généralisées + les intégrales à paramètres.

Chapitre 15 - Rappels sur les espaces préhilbertiens réels.

⚠ Cours uniquement.

I. Produit scalaire.

Inégalité de Cauchy-Schwarz (et cas d'égalité).
Norme euclidienne. Distance euclidienne. Identités de polarisation et égalité du parallélogramme.

II. Orthogonalité.

Vecteurs orthogonaux. Sous-espaces orthogonaux. Théorème de Pythagore.
Familles orthogonales. Familles orthonormales. Relation de Pythagore.
Procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

III. Bases orthonormées ou orthonormales.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée d'un espace euclidien E, alors : $\forall x \in E,\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle\, e_i$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E. Soit x et y deux vecteurs de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top \cdot Y \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^\top \cdot X,$$

où X et Y sont les matrices colonnes constituées des cordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$.

IV. Orthogonal d'une partie.

$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E $\qquad (A \subset B \ \Rightarrow\ B^\perp \subset A^\perp) \qquad A^\perp = (\mathrm{Vect}\ A)^\perp$.

V. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.

VI. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

⚠ Savoir formuler le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, en termes de projection orthogonale.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une BON de F, et si π la projection orthogonale sur F, alors : $\forall x \in E,\ \pi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle\, e_i$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de F et soit π la projection orthogonale sur F. Pour tout vecteur $x \in E$ et tout $y \in F$, on a : $y = \pi(x) \ \Leftrightarrow\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ \langle x - y, e_i \rangle = 0$. ✎

VII. Distance à un sous-espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de <u>dimension finie</u>, soit π la projection orthogonale sur F, et soit $x \in E$. Alors la distance de x à F est atteint en un unique élément de F qui est : $\pi(x)$. ✎
Distance à un hyperplan d'un espace euclidien.

Chapitre 16 - Endomorphismes d'un espace euclidien.

⚠ Cours uniquement.

I. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.

I.1. Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.
Théorème de représentation de Riesz.
Équation cartésienne d'un hyperplan en base orthonormée (en utilisant un vecteur normal).

I.2. Définition de l'adjoint d'un endomorphisme.
Existence d'un unique endomorphisme de E, noté u^* vérifiant : $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle = \langle u^*(x), y\rangle$.
$(u^*)^* = u$. $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.
Si u est un automorphisme de E, alors u^* est un automorphisme de E, et l'on a : $(u^*)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^*$.
Pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, on a : $M_{\mathcal{B}}(u^*) = M_{\mathcal{B}}(u)^\top$. ✎
$\mathrm{tr}\ u^* = \mathrm{tr}\ u$, $\quad \mathrm{rg}\ u^* = \mathrm{rg}\ u$, $\quad \det u^* = \det u \quad$ et $\quad \chi u^* = \chi u$.
$\mathrm{Ker}\ u^* = \left(\mathrm{Im}\ u\right)^\perp \quad$ et $\quad \mathrm{Im}\ u^* = \left(\mathrm{Ker}\ u\right)^\perp$.
Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*. ✎

II. Isométries vectorielles. Matrices orthogonales.

II.1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien.
u est un automorphisme orthogonal (conservation de la norme) si, et seulement si, u est une isométrie vectorielle (conservation du produit scalaire). ✎
⚠ Conformément au programme, nous utiliserons de préférence l'expression “isométrie vectorielle”.

II.2. Groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$.
L'ensemble noté $\mathcal{O}(E)$, des isométries vectorielles de E est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.

II.3. Matrices orthogonales.
Équivalence entre : $M^\top M = \mathrm{I}_n$, $MM^\top = \mathrm{I}_n$, M est inversible et $M^{-1} = M^\top$, les colonnes de M forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$, les lignes de M forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$. ✎

II.4. Groupe spécial orthogonal.

III. Isométrie vectorielle en dimension 2.

III.1. Matrices orthogonales 2×2.

$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. ✎
L'application $\theta \mapsto R(\theta)$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ surjectif et de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.
Le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{U}, \times)$. On en déduit que $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe abélien.

III.2. Isométrie directe en dimension 2.

Si r est une isométrie directe d'un un plan euclidien E, alors il existe un réel θ unique modulo 2π tel que dans n'importe quelle base orthonormée directe de E, la matrice de r soit $R(\theta)$. On dit alors que r est la *rotation* d'angle θ. ✎
Notion de mesure d'angle orienté. Relation de Chasles.

III.3. Isométrie indirecte en dimension 2.

Les isométries indirectes d'un plan euclidien E sont les réflexions. ✎