– TD 12 : Séries entières. –

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n, \qquad \sum \mathrm{e}^{-n^2} z^n, \qquad \sum \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}, \qquad \sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}.$$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum \ln \frac{n+1}{n} z^n, \qquad \sum \sin(\mathrm{e}^{-n}) z^n.$$

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geqslant 1} d_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geqslant 1} s_n z^n,$$

où d_n et s_n désignent respectivement le nombre et la somme des diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n.

Exercice 4. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z^n.$$

Exercice 5. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum \frac{n-1}{n!} z^n.$$

Exercice 6. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$.

Exercice 7. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n^2 z^n$.

Exercice 8. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

Exercice 9. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose :

$$b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

1. Montrer que $R' \geqslant \max(1, R)$.

2. Établir que si $R' > 1$ alors $R' = R$.

3. Montrer que $R' = \max(1, R)$.

Exercice 10. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum z^{n^2}, \qquad \sum \sin(n) z^n, \qquad \sum \frac{\sin(n)}{n^2} z^n.$$

Exercice 11. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) z^n$.

Exercice 12. Déterminer un développement en série entière au voisinage 0 des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$,
2. $g : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.

Exercice 13. Prouver l'existence d'un développement en série entière au voisinage 0 pour la fonctions f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sh} x}.$$

Exercice 14. Déterminer, par la méthode de l'équation différentielle, le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 15. Déterminer, par la méthode de l'équation différentielle, le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction définie par :

$$f(x) = \operatorname{sh}\,(\arcsin x).$$

Exercice 16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer, par la méthode de l'équation différentielle, le développement en série entière au voisinage de 0.

Exercice 17. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 18. Formule de Cauchy - Théorème de Liouville.
On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ et de somme S.
1. Montrer que pour tout réel r tel que $0 < r < R$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n r^n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} S(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
2. On suppose maintenant que $R = +\infty$ et que S est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que S est constante.