

– TD 13 : Intégration sur un intervalle quelconque –

Exercice 1. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^4+1} dt, \quad \int_0^1 \frac{1}{e^t-1} dt, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t \arctan t} dt.$$

Exercice 2. Prouver que l'intégrale suivante converge, puis calculer sa valeur :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt.$$

Exercice 3. À l'aide d'un changement de variables, montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x^2}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.

Exercice 4. Prouver la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+3t+2}, \quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt.$$

Exercice 5. Intégrale de Wallis - Intégrale de Gauss.

1. Montrer que pour tout réel $t : 1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir l'existence des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt, \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n},$$

et montrer l'encadrement : $I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis par :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n = W_{2n+1}$ et $J_{n+1} = W_{2n}$.

4. Montrer que la suite définie par : $u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$ est constante.

5. Déterminer un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I .

Exercice 6. Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. Montrer l'implication :

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \text{ converge}$$

⚠ On n'a pas supposé f intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 7. Intégrales de Bertrand.

Pour quelles valeurs des réels α et β l'intégrale suivante est-elle convergente :

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$

Exercice 8. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(1 + t \ln \left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt.$$

Exercice 9. Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de :

$$I_n = \int_0^1 (\ln t)^n dt.$$

Exercice 10. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

1. Montrer que les deux intégrales ci-dessous sont convergentes et égales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2} dt, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{f(1/t)}{1+t^2} dt.$$

2. Application. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)} dt, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)} dt.$$

Exercice 11. Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt, \quad \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at} dt \quad \text{avec} \quad a > 0.$$

Exercice 12. Déterminer un développement asymptotique à 3 termes au voisinage de $+\infty$ de l'expression :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$$

Exercice 13. Après en avoir justifié l'existence, calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

Exercice 14. Calculer la valeur de :

$$\int_0^1 \arcsin(\sqrt{t}) dt.$$

Exercice 15. L'intégrale de Dirichlet.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Pour tout entier n , on définit :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n sont bien définis.

2. Montrer que la suite (I_n) est constante et en déduire la valeur de I_n .

3. Soit ϕ de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer, à l'aide d'une IPP, que : $\int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5. En déduire que $J_n - I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

6. Montrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$.

7. En déduire la valeur de I .