– TD 15 : Espaces préhilbertiens. –

Exercice 1. On considère l'ensemble : $A = \left\{ \int_0^\pi (e^x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que A admet un minimum et le calculer.

Exercice 2. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

Exercice 3. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$, on pose : $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$.

1. Prouver efficacement qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On se place maintenant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire précédent.

2. Dans cette question $n = 2$. On considère : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.

b. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le projeté orthogonal de J sur $F^\perp$.

c. En déduire la distance de J à F .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.

a. Montrer que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que I_n est normal à H , et en déduire la distance de J à H où J désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 4. On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire de l'exercice précédent. Orthonormaliser la famille :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit p un projecteur d'un espace euclidien E . Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 6. Théorème de représentation de Riesz.

Soit E espace euclidien. Pour $a \in E$, on note φ_a la forme linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi_a &: E \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle a, x \rangle. \end{aligned}$$

On veut montrer que pour toute forme linéaire f de E , il existe un unique $a \in E$ tel que $f = \varphi_a$ i.e. que l'application :

$$\begin{aligned} \varphi &: E \rightarrow E^* \\ a &\mapsto \varphi_a, \end{aligned}$$

est une bijection. *Indication : on pourra commencer par démontrer que φ est linéaire.*

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \text{Tr}(AM)$.