– Programme de colle n° 16 : du 27 au 31/01 –

Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.

Les exercices portent sur le chapitre 15 : espace préhilbertiens réels (révisions de mpsi ; voir programme précédent). En deuxième exercice, on pourra de nouveau poser un exercice sur les intégrales à paramètres.

Les démonstrations à connaître sont indiquées par le symbole ✎

Chapitre 16 - Endomorphismes d'un espace euclidien.

⚠ Cours uniquement.

I. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.

I.1. Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.
Théorème de représentation de Riesz.
Équation cartésienne d'un hyperplan en base orthonormée (en utilisant un vecteur normal).

I.2. Définition de l'adjoint d'un endomorphisme.

II. Isométries vectorielles. Matrices orthogonales.

II.1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien.
u est un automorphisme orthogonal (conservation de la norme) si, et seulement si, u est une isométrie vectorielle (conservation du produit scalaire).
⚠ Conformément au programme, nous utiliserons de préférence l'expression "isométrie vectorielle".

II.2. Groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$.
L'ensemble noté $\mathcal{O}(E)$, des isométries vectorielles de E est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.

II.3. Matrices orthogonales.
Équivalence entre : $M^\top M = \mathrm{I}_n$, $MM^\top = \mathrm{I}_n$, M est inversible et $M^{-1} = M^\top$, les colonnes de M forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$, les lignes de M forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

II.4. Groupe spécial orthogonal.

III. Isométrie vectorielle en dimension 2.

III.1. Matrices orthogonales 2×2.
$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

L'application $\theta \mapsto R(\theta)$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ surjectif et de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{U}, \times)$. On en déduit que $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe abélien.

III.2. Isométrie directe en dimension 2.
Si r est une isométrie directe d'un un plan euclidien E, alors il existe un réel θ unique modulo 2π tel que dans n'importe quelle base orthonormée directe de E, la matrice de r soit $R(\theta)$. On dit alors que r est la *rotation* d'angle θ.

Notion de mesure d'angle orienté. Relation de Chasles.

III.3. Isométrie indirecte en dimension 2.
Les isométries indirectes d'un plan euclidien E sont les réflexions.

IV. Réduction des isométries vectorielles.

L'endomorphisme induit sur un sous-espace stable par une isométrie vectorielle est aussi une isométrie vectorielle.

Si F est un sous-espace vectoriel stable par une isométrie vectorielle u, alors $F^{\perp}$ est également stable par u.

Pour quelles valeurs de θ les matrices $R(\theta)$ et $S(\theta)$ sont-elles diagonalisables ? ✎

Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$ où E est un espace euclidien de dimension 3. Alors, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et un réel θ tels que :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$ ✎

Tout endomorphisme u d'un espace de dimension $n \geqslant 1$ possède une droite ou un plan stable par u. ✎

Soit u une isométrie vectorielle. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est égale à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux :

- de taille 1 de la forme (α) avec $\alpha \in \{-1, 1\}$,
- de taille 2 et de la forme : $R(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Dans une telle base orthonormée, $M_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & & & & \\ & -\mathrm{I}_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

V. Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien.

V.1. Définitions et premières propriétés.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, $u \in \mathcal{S}(E)$ si, et seulement si, $M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Un projecteur de E est un projecteur orthogonal si, et seulement s'il est autoadjoint. ✎

V.2. Réduction des endomorphismes autoadjoints.
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par u. Alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par u. Alors l'endomorphisme induit u_F est autoadjoint.

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont 2 à 2 orthogonaux.

Théorème spectral. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes : ✎
1. u est autoadjoint,
2. $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)}} E_\lambda(u)$,
3. il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.
⚠ Le résultat est faux pour une matrice à coefficients complexes.

V.3. Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs.
Caractérisation spectrale. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
On a alors : $u \in \mathcal{S}^{+}(E) \Leftrightarrow \mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow \mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$. ✎