

– TD 16 : Endomorphismes d'un espaces euclidien. –

$E$  désigne un espace euclidien.

**Exercice 1.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

**Exercice 2.** Soit  $p$  un projecteur de  $E$  et  $s$  une symétrie de  $E$ .

1. Que peut-on dire de  $p^*$  et de  $s^*$  ?
2. Montrer que  $\text{Ker}(p + p^*) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } p^*$ .
3. Montrer que  $p + p^*$  est inversible si, et seulement si,  $\text{Im } p + \text{Im } p^* = E$ .

**Exercice 3.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer les équivalences suivantes :

1.  $u \circ u^* = u^* \circ u$ ,
2.  $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$ .
3.  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ .

**Exercice 4.** On pose  $E = \mathcal{C}([0, 1])$  que l'on munit du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Pour  $f \in E$ , on note  $F$  la primitive de  $f$  qui s'annule en 0 :

$$\forall x \in [0, 1], F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

On considère l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini par  $u(f) = F$ . Déterminer l'adjoint  $u^*$  de  $u$ .

**Exercice 5.** Déterminer toutes les applications  $u \in \mathcal{O}(E)$  ayant  $(X - 1)^2$  pour polynôme annulateur.

**Exercice 6.** Soit  $u$  une isométrie de  $E$  et  $v = u - \text{Id}_E$ .

1. Montrer que  $\text{Ker } v = (\text{Im } v)^\perp$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit :  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$ .

2. Montrer que, pour tout  $x \in E$ , la suite  $(u_n(x))$  converge vers le projeté orthogonal de  $x$  sur  $\text{Ker } v$ .

**Exercice 7.** On suppose l'espace euclidien  $E$  orienté. Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans une base orthonormée directe  $\mathcal{B} = (i, j, k)$  est :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $u$  est une rotation dont on donnera l'axe et une mesure de l'angle au signe près.

**Exercice 8.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Déterminer les hyperplans de  $E$  stables par  $u^*$ .

**Exercice 9.** Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien  $E$ .

On pose :  $k = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda|$ . Montrer que :  $\|u\| = k$ .

**Exercice 10.** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  vérifiant :  $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$ .

1. L'endomorphisme  $u$  est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. On suppose de plus que  $u$  est autoadjoint. Montrer que  $u$  est l'endomorphisme nul.

**Exercice 11.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

**Exercice 12.** Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telle que :  $A^4 = -2A^3 - 2A^2$ . Montrer que  $A = 0$ .

**Exercice 13.** On munit  $\mathbb{R}_3[X]$  du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

On considère l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par  $\varphi(P(X)) = P(-X)$ . Montrer que  $\varphi$  est une symétrie orthogonale.

**Exercice 14.** Montrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est un compact de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , mais qu'il n'est pas connexe par arcs.

**Exercice 15.**

1. Soit  $\mathcal{B}$  une base d'un espace euclidien  $E$  et soit  $\mathcal{C}$  l'orthonormalisée de Schmidt de  $\mathcal{B}$ . Que dire de la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$  ?
2. On note  $T_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  triangulaires supérieures, à coefficients diagonaux strictement positifs. Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe un unique couple  $(O, T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$  tel que  $A = OT$ .
3. Que peut-on dire dans le cas où  $A$  est une matrice non inversible ?

**Exercice 16.** Soit  $p$  et  $q$  des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien  $E$  de dimension  $n \geq 1$ .

1. Montrer que  $p \circ q \circ p$  est diagonalisable.
2. Déterminer  $(\text{Im } p + \text{Ker } q)^\perp$ .
3. En déduire que  $p \circ q$  est diagonalisable.
4. Établir que les valeurs propres de  $p \circ q$  sont comprises entre 0 et 1.

**Exercice 17.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On appelle *racine carrée* de  $A$  toute matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A$ .

1. On suppose ici  $n = 2$ . Déterminer toutes les racines carrées de  $I_2$  appartenant à  $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On désigne par  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+$  l'ensemble des matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  i.e. l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  vérifiant de plus,  $X^T M X \geq 0$  pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+$ . Déterminer toutes les racines carrées de  $A$  appartenant à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+$ .