– TD 18 & 19 : Espaces probabilisés - Indépendance –

Exercice 1. Soit (A_n) une suite d'événements telle que la série $\sum \mathrm{P}(A_n)$ converge. Montrer que l'événement $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p$ est négligeable.

Exercice 2. Déterminer une CNS sur la suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}\big(\{n, n+1, \dots\}\big) = a_n.$$

Exercice 3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

2. Calculer la probabilité de l'événement $2\mathbb{N}^*$.

Exercice 4. Soit (A_n) une suite d'événements mutuellement indépendants telle que la série $\sum \mathrm{P}(A_n)$ diverge. Montrer que l'événement $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p$ est presque sûr.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A où A est l'événement «X est pair ».

Exercice 6. Soit B un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Montrer que l'ensemble des événements indépendants de B forme une tribu sur Ω.

Exercice 7. On cherche un trésor et on découvre une pièce contenant n coffres. On note p la probabilité pour que l'ensemble de ces n coffres contienne le trésor. On a déjà ouvert $n-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il se trouve dans le dernier coffre ?

Exercice 8. Une succession de n individus $I_1, \dots, I_n$ se transmet une information binaire. Chaque individu I_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu I_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

On note A_k l'événement : «I_k reçoit l'information émise par I_1», et on note $p_k = \mathrm{P}(A_k)$.
On note B_k l'événement : «I_k transmet l'information qu'il a reçu».

1. Exprimer p_{k+1} en fonction de p_k.

2. En déduire une expression de p_n en fonction de p et n.

3. On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de la suite p_n ? Justifier.

Exercice 9. Une lance indéfiniment un dé équilibré à 6 faces.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir un «six »pour la première fois lors du n-ème lancer.

2. Montrer qu'il est presque certain d'obtenir au moins un «six».

3. Montrer qu'il est presque certain d'obtenir une infinité de «six».

Exercice 10. On considère X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi. On pose $D = X - Y$ et $I = \inf(X, Y)$.

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(X = k) = pq^k$, où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.

a. Déterminer la loi conjointe de (D, I).

b. Déterminer les lois marginales de D et I. Vérifier que D et I sont indépendantes.

2. On suppose que les variables D et I sont indépendantes et que $\mathrm{P}(X = n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $p \in]0,1[$, tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X = k) = pq^k$ avec $q = 1 - p$.

Exercice 11. Le nombre X d'enfants d'une famille donnée, est modélisée par la loi $\mathcal{P}(2)$.

1. Quelle est la probabilité, pour une famille donnée, d'avoir au moins une fille ?

2. On suppose qu'une famille a exactement une fille. Quelle est la probabilité pour cette famille d'avoir deux enfants ?

Exercice 12. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q.

1. Déterminer $\mathrm{P}(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire la loi de $Z = \inf(X, Y)$.

Exercice 13. Soit $p \in]0,1[$ et $\lambda > 0$. Soit X et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé, et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et que, pour $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = n\}$ est la loi binomiale de paramètre (n, p). Déterminer la loi de Y.

Exercice 14. On considère une suite de lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0,1[$. On note X et Y respectivement le rang du premier et du deuxième pile.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).

2. En déduire les lois de X et Y.

Exercice 15. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et q dans $]0,1[$. Quelle est la probabilité que la matrice suivante soit diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & -X \end{pmatrix}$$

Exercice 16. Convergence presque sûre.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va réelles et X une va réelle définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

On pose : $B = \left\{\omega \in \Omega \mid \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $C_k = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geqslant n} \left\{|X_p - X| \leqslant \frac{1}{k}\right\}$.

1. Montrer que B est un événement et que $P(B) = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{P}(C_k)$.

Lorsque $\mathrm{P}(B) = 1$, on dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement vers* X.

2. On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathrm{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} \{|X_p - X| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.

3. Montrer que si la série de terme général $\mathrm{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge pour tout $\varepsilon > 0$, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.