– Programme de colle n° 17 : du 03/03 au 07/03 –

Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.
Les exercices portent sur le chapitre 19.

– Chapitre 19 : Espaces probabilisés–

I. Notion de tribu et d'espace probabilisable.

Définition de tribu ou σ-*algèbre*. Tribu discrète. Tribu grossière.
Stabilité par intersection dénombrable, par union et intersection finies.

II. Notion d'espace probabilisé.

II.1. Définitions.

Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable. Espace probabilisé.

II.2. Propriétés.

Pour toute famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles $(A_i)_{i\in I}$, la famille $(\mathrm{P}(A_i))_{i\in I}$ est sommable et : $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i)$.
Si A et B sont deux événements incompatibles : $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.
Si $A \subset B$, alors $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$, et $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$.
$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)$.
Système complet d'événements = famille au plus dénombrable d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ deux à deux incompatibles et tels que : $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements. Alors, pour tout événement B la famille $\big(\mathrm{P}(A_i\cap B)\big)_{i\in I}$ est sommable et :

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i\cap B).$$ ✎

Théorèmes de continuité croissante, et de continuité décroissante. ✎
Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$ ✎

Inégalité de Boole ou sous-additivité.
Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable.
Une intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.

II.3. Le cas particulier des espaces probabilisés discrets.

On appelle *distribution de probabilités discrètes* sur Ω toute famille sommable d'éléments de $\mathbb{R}_+$ indexée par Ω et de somme 1.

Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrètes sur Ω, alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{P}: & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\omega\in A} p_\omega \end{array}$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. ✎

Cette probabilité P est appelée *probabilité associée* à la distribution $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$.

Elle vérifie : $\forall\omega \in \Omega,\ \mathrm{P}\big(\{\omega\}\big) = p_\omega$.

On appelle *espace probabilisé discret* tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ où P est une probabilité associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Si l'on pose $p_\omega = \mathrm{P}\big(\{\omega\}\big)$, pour tout $\omega \in \Omega$, alors $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités discrète sur Ω et P est la probabilité associée à cette distribution.

III. Variables aléatoires discrètes.

III.1. Définition d'une variable aléatoire discrète.

III.2. Loi d'une variable aléatoire discrète.

Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, alors, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{P}_X: & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathrm{P}(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$. Cette probabilité est appelée *loi de* X. ✎

Si X est une variable aléatoire discrète, alors la famille d'événements $(\{X = x\})_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé *système complet d'événements associé à* X. On a ainsi :

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \mathrm{P}(X = x) = 1.$$

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, alors, la loi de X, P_X, est entièrement déterminée, par la donnée de la distribution de probabilités discrète $\big(P(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$.

De plus pour tout événement A de $X(\Omega)$:

$$\mathrm{P}_X(A) = \sum_{x\in A} \mathrm{P}(X = x).$$

Soit E un ensemble et $(p_x)_{x\in E}$ une distribution de probabilités discrète sur E.

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et une variable aléatoire X telle que :

$$X(\Omega) \subset E \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E,\ \mathrm{P}(X = x) = p_x. \quad ✎$$

III.3. Lois usuelles.

Loi de Bernoulli. Loi binomiale. Loi géométrique. Loi de Poisson.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la loi binomiale de paramètre (n, p_n). On suppose que la suite (np_n) converge vers un réel $\lambda > 0$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \quad ✎$$

– Chapitre 17 : Probabilités conditionnelles et indépendance–

⚠ Cours uniquement.

I. Probabilités conditionnelles.

P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Formule des probabilités composées.
Formule des probabilités totales.
Formules de Bayes.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire discrète sachant un événement. Cette loi est déterminée par la donnée de $\mathrm{P}_A(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
Une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ est sans mémoire si, et seulement si, X suit une loi géométrique dont précisera la valeur du paramètre p. ✎

II. Événements indépendants.

Indépendance de deux événements.
Indépendance mutuelle d'une famille d'événements. Indépendance deux à deux.