– Programme de colle n° 18 : du 10 au 14 mars –

Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.
Les exercices portent sur tout le programme de probabilités.

– Chapitre 20 : Probabilités conditionnelles et indépendance–

I. Probabilités conditionnelles.

II. Événements indépendants.

Indépendance de deux événements.
Indépendance mutuelle d'une famille d'événements. Indépendance deux à deux.

III. Couples de variables aléatoires.

Loi conjointe.
Savoir retrouver les lois marginales à partir de la loi conjointe.
On lance deux dés. On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux résultats, et Y la variable aléatoire égale au plus grand. Déterminer les lois marginales, à partir de la loi conjointe. ✎
Indépendance de deux variables aléatoires.
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes et indépendates, on peut retrouver la loi conjointe à partir de la loi marginale.
Loi de $X+Y$.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$, alors $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$. ✎
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.
Loi de $I = \text{Inf}(X,Y)$ et $S = \text{Sup}(X,Y)$ en calculant $\text{P}(S \leqslant k)$ et $\text{P}(I > k)$.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([\![1,6]\!])$. Déterminer la loi de $I = \text{Inf}(X,Y)$ et $S = \text{Sup}(X,Y)$ directement (i.e. sans déterminer la loi conjointe).
Généralisation au cas d'un n-uplet de variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètres p. On note T le nombre de tirages nécessaires pour obtenir un succès (i.e. un 1) pour la première fois et $+\infty$ si l'on n'a jamais de succès. Déterminer la loi de T.

– Chapitre 21: Espérance et variance –

I. Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe.

I.1. Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
On appelle *espérance* de X, et l'on note $\text{E}(X)$, la somme de la famille $\big(x\text{P}(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$:

$$\text{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\text{P}(X=x).$$

Pour tout événement A, $E(\mathbb{1}_A) = \mathrm{P}(A)$.
On note $L^1(\Omega, \mathbb{K})$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes d'espérance finie.
Si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors : $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X \geqslant n)$. ✎

I.2. Espérance des lois usuelles.

I.3. Propriétés de l'espérance.

Formule de transfert : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble quelconque et f est une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$.
Alors la variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $\big(f(x)\mathrm{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas :

$$\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathrm{P}(X = x).$$

La formule de transfert appliquée au couple $Z = (X, Y)$ s'écrit de la forme :

$$\mathrm{E}\big(f(X, Y)\big) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y)\mathrm{P}(X = x, Y = y).$$

Inégalité triangulaire. Linéarité de l'espérance.
$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$.
Soit X une variable aléatoire réelle positive. Alors :
1. $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$,
2. $\mathrm{E}(X) = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{P}(X = 0) = 1$. On dit alors que X est *presque sûrement nulle*.
Croissance de l'espérance.
Espérance d'un produit XY de deux variables aléatoires discrètes.
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes et d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \quad ✎$$

II. VARIANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE.

II.1. Définition.

On dit qu'un variable aléatoire X *admet un moment d'ordre* 2 si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie.
Par définition : $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) \Leftrightarrow X^2 \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz. Si $(X, Y) \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ alors $XY \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ et : $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(Y^2)$.
Il y a égalité si, et seulement si, X et Y sont proportionnelles presque sûrement.
Définition de la *variance* et de *écart type* d'une variable aléatoire discrète $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$.

II.2. Propriétés de la variance.

$V(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x)$.
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
$V(aX + b) = a^2 V(X)$.
$V(X) \geqslant 0$ et $V(X) = 0$ si, et seulement si, il existe un réel m tel que $P(X = m) = 1$.

II.3. Variance des lois usuelles.

II.4. Covariance de deux variables aléatoires réelles.

Pour $(X,Y) \in \left(L^2(\Omega,\mathbb{R})\right)^2$. On définit : $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\Big(\big(X-E(X)\big)\cdot\big(Y-E(Y)\big)\Big)$.

L'application Cov est une forme bilinéaire symétrique positive !

Formule de Kœnig-Huygens. Si $(X,Y) \in \left(L^2(\Omega,\mathbb{R})\right)^2$, alors : $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Si $(X,Y) \in \left(L^2(\Omega,\mathbb{R})\right)^2$ alors : $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Si $(X,Y) \in \left(L^2(\Omega,\mathbb{R})\right)^2$ et si X et Y sont indépendantes, alors : $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ et $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

Si $(X_1,\dots,X_n) \in \left(L^2(\Omega,\mathbb{R})\right)^n$ alors : $V(X_1+\dots+X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i,X_j)$.

Si de plus, les variables aléatoires sont 2 à 2 indépendantes alors : $V(X_1+\dots+X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k)$.

⚠ On en déduit une autre preuve de la variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

III. Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres.

Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. ✎

Loi faible des grands nombres. ✎

IV. Fonctions génératrices.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k)\,t^k$.

La convergence est normale sur $[-1,1]$. ✎

La fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ caractérise la loi.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1. Dans ce cas, on a : $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$. ✎

⚠ On ne démontre qu'un sens de l'implication.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ appartient à $L^2(\Omega,\mathbb{R})$ si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas, on a : $G''_X(1) = \mathrm{E}\big(X(X-1)\big)$.

Dans ce cas, on a : $\mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \big(G'_X(1)\big)^2$.

Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

⚠ **À connaître parfaitement :**

$X \sim \mathcal{U}\big(\llbracket 1,n\rrbracket\big)$	$\mathrm{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$	$\mathrm{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$	$G_X(t) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^k$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	$\mathrm{E}(X) = p$	$\mathrm{V}(X) = pq$	$G_X(t) = q+pt$
$X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\mathrm{E}(X) = np$	$\mathrm{V}(X) = npq$	$G_X(t) = (q+pt)^n$
$X \sim \mathcal{G}(p)$	$\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{p}$	$\mathrm{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$	$G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathrm{E}(X) = \lambda$	$\mathrm{V}(X) = \lambda$	$G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$