– TD 21 : Espérance et variance –

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Calculer : $\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 2. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés. Déterminer pour tout $t \in]-1,1[$ la valeur de $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

Exercice 3. Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que, pour toute fonction g définie sur $\mathbb{N}$ telle que les espérances existent, on a :

$$\mathrm{E}(Ng(N)) = \lambda\,\mathrm{E}(g(N+1)).$$

2. Calculer $\mathrm{E}\left(\frac{1}{N+1}\right)$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer : $\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big)$.

2. Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Exercice 5. Soit A et B deux événements indépendants (dont l'un au moins est non négligeable) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et la variable aléatoire $Z = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.

Le but de cet exercice est de montrer que parmi les événements $\{Z=0\}$, $\{Z=1\}$ et $\{Z=2\}$, il y en au moins un de probabilité supérieure à $4/9$. Nous noterons a, b et c leur probabilité respective, et supposerons par exemple que $b < 4/9$.

1. Calculer $G_Z(t)$ en fonction de a, b et c, puis en fonction de $G_{\mathbb{1}_A}(t)$ et $G_{\mathbb{1}_B}(t)$.

2. Montrer que $b^2 \geqslant 4ac$.

3. Montrer que $\left(a - \frac{4}{9}\right)\left(c - \frac{4}{9}\right) < 0$.

Exercice 6. On dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

1. Que vaut $\mathrm{P}(X \geqslant k)$? En déduire la loi de X.

2. Calculer la valeur de $\mathrm{E}(X)$.

3. À l'aide d'une somme de Riemann, calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$.

4. En déduire que $\mathrm{E}(X) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n+1}N$.

Exercice 7. Loi hypergéométrique.

Soit n et N des entiers tels que : $1 \leqslant n \leqslant N$. Soit $p \in]0,1[$ tel que $Np \in \mathbb{N}$. On pose $q = 1-p$.

1. Prouver l'existence d'une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On dit alors que X suit la *loi hypergéométrique* de paramètres (n,p,N) et l'on note $X \sim \mathcal{H}(n,p,N)$.

2. Prouver que $\mathrm{E}(X) = np$ et $\mathrm{V}(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire discrète et centrée à valeurs dans $[-1,1]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$ existe et : $\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$.

3. Soit $r > 0$. Établir : $\mathrm{P}(|X| > r) \leqslant 2\mathrm{e}^{-r^2/2}$.

Exercice 9. Deux joueurs lancent deux dés équilibrés. On veut déterminer la probabilité que les sommes des deux jets soient égales. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires déterminant les valeurs des dés lancés par le premier joueur et Y_1 et Y_2 celles associées au deuxième joueur. On étudie donc l'événement $\{X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2\}$ que l'on réécrira $\{14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2 = 14\}$.

1. Déterminer la fonction génératrice de la variable à valeurs naturelles $Z = 14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2$.

2. En déduire la valeur de $\mathrm{P}\left(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2\right)$.

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d suivant la loi de X et N une variable aléatoire indépendante des X_n et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Pour $\omega \in \Omega$, on pose :

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $G_S(t) = G_N \circ G_X(t)$.

2. On suppose que X et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et la calculer.

3. On suppose que X et N ont un moment d'ordre 2. Montrer que S possède un moment d'ordre 2 et calculer la variance de S.

On étudie la transmission du nom de famille. Pour cela, nous ferons l'hypothèse que ce sont les mères qui transmettent leur nom à leurs enfants. On suppose que le nombre de descendants féminins d'un individu suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note Z_0 le nombre d'individus féminins au début de l'étude, Z_n le nombre de descendants féminins à la n-ième génération. On suppose que $Z_0 = 1$.

4. Écrire une fonction `Python` renvoyant le nombre de descendants féminins à la n-ième génération.

5. On considère λ et n fixés. Calculer une moyenne, sur un grand nombre de mesures, du nombre de descendants féminins. Comparer à $\mathrm{E}(Z_n)$.

Exercice 11. On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1-p$ d'échouer. Ceci définit une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès.

1. Écrire l'événement $\{S_m = k\}$ en utilisant les variables aléatoires X_i.

2. Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.

3. Même question avec $S_m - S_{m-1}$ pour $m \geqslant 2$.

4. Déterminer la fonction génératrice de S_m puis la loi de S_m.

Exercice 12. Dans le cadre de son TIPE, un étudiant de MP souhaite fabriquer deux dés à 6 faces (truqués ou non). Son objectif est de faire en sorte que la somme d'un lancer de chacun des deux dés suive la loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$. On note X et Y les variables aléatoires donnant la valeur de la face obtenue par le premier et le second dé. On suppose que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. En calculant la fonction génératrice de $Z = X + Y$, prouver que son professeur de mathématiques ne validera pas son travail.

Exercice 13. Soit $s > 1$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nb premiers et pour $p \in \mathcal{P}$: $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$.

1. Pour quelle valeur du réel λ, existe-t-il une probabilité P sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(\{n\}) = \lambda n^{-s}$.

2. Montrer que les événements A_p pour $p \in \mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants.

3. Calculer $\mathrm{P}(\{1\})$ et en déduire : $\zeta(s) = \displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$.