

– Programme de colle n° 19 : du 24 au 28/03 –

△ Pas de colle de maths du 17 au 21 mars △

Les questions de cours et les exercices portent sur tout ce qui suit.

– CHAPITRE 22 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES –

**I. RAPPELS DE MPSI.**

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2.

Exemple d'équations non normalisées : problème de raccord.


**II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES VECTORIELLES D'ORDRE 1.**

**II.1.** Définitions.

$x' = a(t)(x) + b(t)$  d'inconnue  $x$  où  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $b : I \rightarrow E$  sont deux fonctions continues.

$X' = A(t)X + B(t)$  d'inconnue  $X$  où  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  sont deux fonctions continues.

**II.2.** Problème de Cauchy.

Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy. 

**II.3.** Structure de sous-espace affine de l'ensemble des solutions.

**II.4.** Le théorème de Cauchy linéaire.

Théorème de Cauchy linéaire (admis) : Soit  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $b : I \rightarrow E$  deux fonctions continues.

Pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times E$ , il existe une unique solution définie sur  $I$  au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' &= a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Si deux solutions  $f_1$  et  $f_2$  de  $(E)$  sur  $I$  coïncident en un point  $t_0$ , alors elles sont confondues.

Soit  $\mathcal{S}_0$  l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène  $x' = a(t)(x)$ . Pour tout  $t_0 \in I$ , l'application :

$$\begin{aligned} E_0 &: \mathcal{S}_0 &\rightarrow & E \\ f &\mapsto & f(t_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier :  $\dim \mathcal{S}_0 = \dim E$ .

### III. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SCALAIRES LINÉAIRES D'ORDRE $n$ .

On s'intéresse aux équations scalaires de la forme :  $x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t)$

#### △ Savoir représenter une équation scalaire linéaire d'ordre $n$ par un système différentiel.

Théorème de Cauchy linéaire. Pour tout  $t_0 \in I$  et  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ , il existe une unique solution sur  $I$  au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} & = & b(t) \\ \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x^{(k)}(t_0) & = & x_k \end{cases}$$

Pour tout  $t_0 \in I$ , l'application :

$$\begin{aligned} E_0 & : \mathcal{S}_0 & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ f & \mapsto & (f(t_0), f'(t_0), \dots, f^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier :  $\dim \mathcal{S}_0 = n$ .

### IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SCALAIRES D'ORDRE 2.

$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$  où  $a_0, a_1$  et  $b$  sont des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ . D'après les résultats de la partie précédente :

1. L'espace vectoriel  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène ( $E_0$ ) associée à ( $E$ ) est de dimension 2.
2. Pour toute solution particulière  $f_p$  de ( $E$ ), on a :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_0 = \{f_p + f \mid f \in \mathcal{S}_0\}.$$

3. D'après, le théorème de Cauchy linéaire il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x & = & b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \\ x'(t_0) & = & x_1 \end{cases}$$


pour tout  $(t_0, x_0, x_1) \in I \times \mathbb{K}^2$ .

#### IV.1. Wronskien d'un couple de solutions.

Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux solutions de l'équation homogène ( $E_0$ ) et soit  $W$  leur wronskien. Sont équivalentes :

1.  $(f_1, f_2)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$ ,
2.  $\forall t \in I, W(t) \neq 0$ ,
3.  $\exists t \in I, W(t) \neq 0$ .

#### IV.2. Méthode de variation des constantes.


Résoudre sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  l'équation :  $x'' + x = \tan(t)$ . 

#### IV.3. Recherche de solutions développables en série entière.

**IV.4. Méthode du wronskien.**

On souhaite résoudre l'équation homogène :  $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$  ( $E_0$ ).

On détermine alors le wronskien (à une constante multiplicative près) en résolvant l'équation d'ordre 1 :  $x' + a_1(t)x = 0$ .

À l'aide de la solution obtenue à l'exercice précédent, et de la méthode du wronskien, déterminer une base de solutions de ( $E_0$ ) sur  $]0, \pi[$  :  $tx'' + 2x' + tx = 0$ . 

On admet que  $f_1 : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est une solution de ( $E_0$ ) qui ne s'annule pas sur  $]0, \pi[$ .

Soit  $f$  une solution de ( $E_0$ ). On a alors :

$$\left(\frac{f}{f_1}\right)' = \frac{W}{f_1^2}.$$

Or  $W$  est solution de l'équation d'ordre 1 :  $tx' + 2x = 0$ .

On obtient l'existence de  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :  $W(t) = \frac{\alpha}{t^2}$ , d'où :

$$\left(\frac{f}{f_1}\right)' = \frac{\frac{\alpha}{t^2}}{\frac{\sin^2 t}{t^2}} = \frac{\alpha}{\sin^2 t}.$$

En primitivant, on obtient l'existence de  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\frac{f(t)}{f_1(t)} = -\alpha t + \beta = -\alpha \frac{\cos t}{\sin t} + \beta.$$

D'où :  $f(t) = -\alpha \frac{\cos t}{t} + \beta \frac{\sin t}{t}$ .

On a donc prouvé :  $\mathcal{S}_0 \subset \text{Vect} \{f_1, f_2\}$  avec  $f_1 : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  et  $f_2 : t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ .

Or,  $\dim \mathcal{S}_0 = 2$ . On en déduit que  $\mathcal{S}_0 = \text{Vect} \{f_1, f_2\}$  et que  $(f_1, f_2)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$ .

 Inutile de prouver la liberté de  $(f_1, f_2)$ , c'est une conséquence.

**V. EXPONENTIELLE D'UN ENDOMORPHISME, D'UNE MATRICE.****V.1. Généralités.****V.2. Exponentielle et réduction.**


S'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = PBP^{-1}$ , alors :  $\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$ .

Exponentielle d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors, le spectre de  $\exp(A)$  est donné par :

$$\text{sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda \mid \lambda \in \text{sp}(A)\}. \quad \text{img alt="pencil icon" data-bbox="618 728 635 741}}$$

Plus précisément, si les valeurs propres de  $A$ , comptées avec ordre de multiplicité (algébrique), sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors celles de  $\exp(A)$  sont  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ .

 La proposition précédente est fautive sur  $\mathbb{R}$ . Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'inclusion suivante reste vraie :  $\{e^\lambda \mid \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(A)\} \subset \text{sp}_{\mathbb{R}}(\exp(A))$ , mais l'inclusion inverse n'est pas toujours vérifiée.

**V.3.** Régularité de l'exponentielle.

Les applications :  $\mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont continues.  
 $a \mapsto \exp(a)$  et  $A \mapsto \exp(A)$

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ . L'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ t &\mapsto \exp(ta) \end{aligned}$$


est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et sa dérivée est donnée par :  $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a$ . 

**V.4.** Propriétés algébriques de l'exponentielle.

Si les deux matrices  $A$  et  $B$  commutent, alors :  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$ .

**VI.** SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES HOMOGENÈS À COEFFICIENTS CONSTANTS.**VI.1.** Généralités.

Résolution du problème de Cauchy. Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ , l'application :


$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow E \\ t &\mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0) \end{aligned}$$
 


est l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy homogène à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' &= a(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

**VI.2.** Résolution pratique de l'équation homogène quand  $A$  est diagonalisable.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonalisable. Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  une base de vecteurs propres de  $A$ , et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres respectives. Les solutions de l'équation homogène  $X' = AX$  sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} X_i \quad \text{avec} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$
 

 Savoir démontrer ce résultat avec et sans la notion d'exponentielle de matrice.

**VI.3.** Méthode de variation de la constante.