– TD 22 : Équations différentielles linéaires –

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle non normalisée : $t^2x' - x = t^2$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle non normalisée : $2t^2x'' - 5tx' + 5x = 0$.

Exercice 3. On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation homogène $t^2x'' + tx' - x = 0$.
1. Déterminer une solution évidente.
2. À l'aide de la méthode du wroskien, déterminer une base de l'ensemble des solutions.

Exercice 4. Oscillations couplées de deux masses.
Deux masses identiques sont reliées à deux points fixes et entre elles, par trois ressorts de même raideur. On admet que les abscisses x_1 et x_2 des deux masses, repérées par rapport à leur position d'équilibre respective, sont, en fonction du temps t, solutions du système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1''(t) & = & -2x_1(t) & + & x_2(t) \\ x_2''(t) & = & x_1(t) & - & 2x_2(t). \end{array}\right.$$

1. Résoudre ces équations différentielles.
Indication : on écrira le système sous forme matricielle, et on essaiera de réduire la matrice.
2. En déduire les fonctions x_1 et x_2 avec les conditions initiales :

$$x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad x_2'(0) = 0.$$

Ces fonctions sont-elles périodiques ?

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -\mathrm{I}_{2n}$. Résoudre l'équation : $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 6. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & -x & + & 3y & + & \mathrm{e}^t \\ y' & = & -2x & + & 4y & & \end{array}\right.$$

Exercice 7. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x' & = & \cos(t)x & + & \sin(t)y \\ y' & = & -\sin(t)x & + & \cos(t)y \end{array}\right.$$

Exercice 8. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x' & = & (t+3)x & + & 2y \\ y' & = & -4x & + & (t-3)y \end{array}\right.$$

Exercice 9. Soit A une matrice non inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \mapsto X(t)$ une solution du système différentiel $X' = AX$. Montrer que les valeurs prises par la fonction $t \mapsto X(t)$ sont incluses dans un hyperplan affine.

Exercice 10. On étudie le système différentiel :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccc} x' & = & z-y \\ y' & = & x-z \\ z' & = & y-x \end{array}\right.$$

1. Ce système possède-t-il des solutions ?
2. Sans résoudre le système, montrer que pour tout réel t, le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ se situe à l'intersection d'un plan et d'une sphère.
3. Calculer A^3 et exprimer sous forme matricielle la solution générale du système (S).

Exercice 11. On considère l'équation différentielle : $(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$.
Résoudre cette équation pour $x \in]-1, 1[$ en posant $x = \sin t$.

Exercice 12. Le but de ce problème est d'étudier l'équation différentielle :

$$y'' - y = f(x) \qquad (E)$$

où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On notera g l'unique solution de (E) vérifiant de plus : $g(0) = g'(0) = 0$.
1. Résoudre (E) et déterminer g lorsque :
  a. $f(x) = x + x^3$.
  b. $f(x) = \cos^2(x)$.
2. Dans toute cette question, on suppose que f est paire.
  a. Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = g(x) - g(-x)$ est solution de (E_0).
  b. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.
  c. En déduire que g est paire.

Exercice 13. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$.

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
(i) la matrice A est antisymétrique,
(ii) chaque solution X du système différentiel $X' = AX$ est de norme constante.

Exercice 16. Le but de ce problème est d'étudier l'équation différentielle :

$$y'' + \mathrm{e}^{-x} y = 0 \qquad (E).$$

Soit f une solution de (E) bornée sur $\mathbb{R}_+$.
1. Montrer que la dérivée f' admet une limite finie en $+\infty$.
2. Quelle est la valeur de sa limite ?
3. Soit g une autre solution de (E) bornée sur $\mathbb{R}_+$. En étudiant le wronskien de f et g, montrer qu'elles sont liées. Que peut-on en conclure ?