– TD 23 : Calcul différentiel et optimisation –

Exercice 1. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $f : E \to F$ une application différentiable vérifiant de plus :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Montrer que f est linéaire. *Indication : on pourra prouver que* $f = \mathrm{d}f(0)$.

Exercice 2. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit f une bijection de U dans V, où U et V sont des ouverts respectivement de E et F. On suppose que f est différentiable en un point $a \in U$ et que f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$. Montrer que E et F sont isomorphes.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0,0)$.

2. Admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?

Exercice 5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 6. Déterminer le maximum de la fonction f définie sur le compact $K = [0,1]^2$ donnée par :

$$f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Exercice 7. Étudier les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 8. Inégalité arithmético-géométrique.
Soit $n \geqslant 2$ et $s > 0$. On pose :
$$A = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = s \right\}.$$

1. Déterminer le maximum de f sur A où f est définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$.

2. Retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 9. Équation aux dérivées partielles (EDP).
On cherche toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ solutions de l'EDP :
$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 3.$$
La méthode est de faire un changement de variables linéaire en posant $u = ax + by$ et $v = cx + dy$, ce qui signifie que l'on définit une fonction g par : $f(x, y) = g(ax + by, cx + dy)$.

1. Déterminer les constantes a, b, c et d telles que g soit solution d'une EDP plus simple à résoudre.

2. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Exercice 10. Équation aux dérivées partielles (EDP).
Résoudre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ l'EDP :
$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$
On pourra passer en coordonnées polaires i.e. définir une fonction g par : $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Exercice 11. Fonctions harmoniques.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est *harmonique* si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et qu'elle vérifie :
$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

1. Montrer que si f est harmonique et de classe $\mathcal{C}^3$, alors les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ sont également harmoniques.

On suppose désormais que $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0\}$ et que f est radiale i.e. qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que : $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.

2. Montrer que f est harmonique si, et seulement si, φ' est solution d'une équation différentielle $xy' + y = 0$.

3. En résolvant cette équation, déterminer f.

Exercice 12. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $X = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ en $(0, 0)$, puis en $(1, 0)$.

Exercice 13. Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents au groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n est inclus dans l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles.

Exercice 14. Fonctions convexes.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$. On suppose de plus, f convexe i.e. : $\forall (a, b) \in U^2, \forall \theta \in [0, 1],\ f((1-\theta)a + \theta b) \leqslant (1-\theta)f(a) + \theta f(b)$.

Montrer que tout point critique de f est un minimum global de f.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall t > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

1. On suppose que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$

2. Prouver la réciproque.

Exercice 16.

1. Soit E un espace euclidien, U un ouvert de E, et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Rappeler la définition de la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ de f en $a \in U$ et du gradient $\nabla f(a)$, ainsi que l'expression de $\nabla f(a)$ en base orthonormale.

2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que $\nabla(\det)(A) = \mathrm{Com}(A)$.

3. Quel est le coefficient de X dans χ_A ?

On rappelle que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ désigne *le groupe spécial linéaire* i.e. l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1.

4. Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Exercice 17. Soit l'application $f : U \to \mathbb{C}$, avec U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

Pour $z = x + iy$, avec x et y réels, on pose $f(z) = g(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$, avec $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ réels.

On dit que f est *holomorphe* en $z_0 \in U$ si $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe, cette limite étant alors notée $f'(z_0)$.

Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$.

1. Montrer que si f est holomorphe en z_0, alors g estt différentiable en (x_0,y_0) et que :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0).$$

2. Montrer que si f est dérivable en z_0, alors :

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0).$$

3. On suppose maintenant que f et f' sont holomorphes sur U. Montrer que :

$$\Delta(P) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta(Q) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

4. Montrer la réciproque de la question 1.