– Programme de colle n° 20 : du 31/03 au 04/04 –

⚠ Voir le planning de la semaine 17 au 21 mars ⚠

Les questions de cours et les exercices portent sur tout ce qui suit. ⚠ Les définitions et les résultats de ce chapitre doivent être parfaitement maîtrisés. On veillera notamment à ce que les étudiants connaissent la nature des objets qu'ils manipulent (vecteurs, matrices, applications linéaires, scalaires).

– CHAPITRE 23 : CALCUL DIFFÉRENTIEL ET OPTIMISATION (1) –

I. DÉRIVÉE SELON UN VECTEUR, DÉRIVÉES PARTIELLES.

I.1. Dérivée selon un vecteur ou dérivée directionnelle.
On dit que f admet une dérivée au point a selon le vecteur h si la fonction $\varphi : t \mapsto f(a+th)$ est dérivable en 0. Dans ce cas, cette dérivée est appelée *dérivée de f au point a selon le vecteur h*, et notée $\mathrm{D}_h f(a)$:

$$\mathrm{D}_h f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}.$$

I.2. Dérivée partielle.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on appelle i-ème *dérivée partielle* de f en a dans la base $\mathcal{B}$, lorsqu'elle existe, la dérivée de f en a selon le vecteur e_i. On la note alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a).$$

II. DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION EN UN POINT.

II.1. Notations o et O.
II.2. Différentielle en un point.
On dit que f est *différentiable* en a s'il existe une application linéaire u de E dans F telle que l'on ait :

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + u(h) + o(h).$$

Théorème 1. Si f différentiable en a, alors l'application linéaire u ci-dessus est unique. Elle est appelée la *différentielle* de f en a et notée $\mathrm{d}f(a)$.
De plus, f admet une dérivée au point a selon tout vecteur h et on a :

$$\mathrm{d}f(a) \;:\; \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ h & \mapsto & \mathrm{D}_h f(a) \end{array}$$ ✎

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est différentiable en tout point $a \in E$ et : $\forall a \in E,\ \mathrm{d}f(a) = f$.

Cas particulier des fonctions de la variable réelle : f est différentiable en a si, et seulement si, f est dérivable en a. Dans ce cas, pour tout réel h : $\mathrm{d}f(a)\cdot h = hf'(a)$ et $f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$. ✎

II.3. Matrice jacobienne.
II.4. Gradient d'une fonction numérique.
II.5. Opérations sur les fonctions différentiables.
Si f est différentiable en a et si L est linéaire alors, l'application $L \circ f$ est différentiable en a et : $\mathrm{d}\big(L \circ f\big)(a) = L \circ \big(\mathrm{d}f(a)\big)$. ✎
Différentielle d'une composée : $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g\big(f(a)\big) \circ \mathrm{d}f(a)$.
Étude de la différentiabilité de l'application définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $M \mapsto M^{-1}$. ✎
⚠ Savoir énoncer **la règle de la chaîne**.

– Chapitre 24 : Calcul différentiel et optimisation (2) –

I. Fonctions de classes $\mathcal{C}^1$.

I.1. Généralités.
Une fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f est différentiable sur U et si l'application $\mathrm{d}f : a \mapsto \mathrm{d}f(a)$ est continue sur U.
⚠ C'est une application définie sur U et à valeurs dans $\mathcal{L}(E, F)$.

I.2. Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.
I.3. Caractérisations des applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 2. Soit $f : U \to F$, où U est un ouvert de E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

2. Pour tout $h \in E$, f admet une dérivée selon le vecteur h en tout point de U, et l'application $a \mapsto \mathrm{D}_h f(a)$ est continue sur U.

3. Toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{x_i}$ existent en tout point de U et sont toutes continues sur U.

Théorème 3. Caractérisation des fonctions constantes.
Soit U un ouvert connexe par arcs de E. Une fonction f de U dans F est constante si, et seulement si, f est différentiable sur U et $\mathrm{d}f(a) = 0$ pour tout $a \in U$.

⚠ Savoir démontrer ce théorème dans le cas particulier où U un ouvert convexe. ✎

II. Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie.

II.1. Notion de vecteur tangent.
Soit X une partie de E et $x \in X$. Un vecteur v de E est un *vecteur tangent* à X en x s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to E$ à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que :

$$\gamma(0) = x \qquad \text{et} \qquad \gamma'(0) = v.$$

Notation. L'ensemble des vecteurs tangents à X en x se note $T_x X$.

II.2. Exemples d'espaces tangents.
Soit $\mathcal{F} = a + F$ un sous-espace affine passant par a et dirigé par F. Pour tout $x \in \mathcal{F}$, $T_x \mathcal{F} = F$.

II.3. Cas des ensembles définis par une équation.

Théorème 4. Soit $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}.$$

Si $a \in X$ et $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, alors $T_aX = \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}g(a)$.

Savoir prouver l'inclusion $T_aX \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}g(a)$. ✎

Théorème 5. Seconde interprétation du gradient.
Soit $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ et : $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.
Si $a \in X$ et $\nabla g(a) \neq 0$, on a $T_aX = \nabla g(a)^{\perp}$.

Notion de ligne de niveau.

III. Optimisation : étude au premier ordre.

III.1. Notion d'extremum local.
III.2. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et a un point intérieur à A. Si f admet un extremum local en a, et si f est différentiable en a, alors $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Méthode. Les extrema locaux de f sont donc à chercher parmi :
- les points critiques de f,
- les points intérieurs à A mais où f n'est pas différentiable,
- les points de $A \setminus \mathring{A}$.

III.3. Utilisation de la compacité.
III.4. Optimisation sous contrainte.
Dans cette partie, on considère un ouvert U de E, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ et X une partie de U. On va s'intéresser non pas à chercher les extrema de f sur U, mais sur X.

On parle alors, d'optimisation sous contrainte. La contrainte, c'est d'être dans X.

L'étude des points critiques ne peut se faire qu'en un point intérieur à X. Lorsque X est d'intérieur vide, aucun des résultats précédents ne peut donc s'appliquer.

Si la restriction de f à X admet un extremum local en $a \in X$ et si f est différentiable en a alors : $T_aX \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(a)$. ✎

Théorème 6. Théorème d'optimisation sous contrainte.
Soit f et g deux fonctions numériques définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de E.

Soit X l'ensemble des zéros de g : $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.

Soit $a \in X$. Si la restriction de f à X admet un extremum local en a, et si $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, alors $\mathrm{d}f(a)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(a)$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathrm{d}f(a) = \lambda\,\mathrm{d}g(a). \quad ✎$$

⚠ Le rapport λ est appelé le *multiplicateur de Lagrange.*