– TD 1 : Calcul asymptotique –

Exercice 1. Calculer les limites suivantes, où $a > 0$ et $b > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)^{\ln x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Exercice 2.

1. Montrer qu'il existe un polynôme réel P_n vérifiant $\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^n)$.
2. Montrer que X^n divise le polynôme $P_n^2 - X - 1$.

Exercice 3. Soit (u_n) une suite de réels.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $u_n \sim \frac{1}{n}$. Montrer que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$.
2. On suppose maintenant que (u_n) est décroissante et vérifie : $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$.
 - a. Montrer que (u_n) converge vers 0^+ .
 - b. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}.$$

Exercice 5. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, en 0, de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\cos x)$. En déduire le développement limité à l'ordre 4, en 0, de la fonction $\tan$.

Exercice 6. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, en 0, de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}.$$

Exercice 7. Déterminer un équivalent en 0 de $x^x - (\sin x)^x$.

Exercice 8. On admet qu'il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f' = f - \frac{f^2}{2} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Prouver que f admet un DL₃(0) puis le déterminer.

Exercice 9. Pour $n \geq 2$, on considère le polynôme : $P_n = X^n - nX + 1$.

1. Montrer que P_n admet exactement une racine réelle dans $[0, 1]$. On la note x_n .
2. Étudier la convergence de la suite (x_n) , puis un équivalent simple de x_n .

Exercice 10. Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 4, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

Exercice 11. Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 1, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\cos x - 1}.$$

Exercice 12. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que l'équation $x + e^x = n$ admet une unique solution notée x_n .
2. Étudier la convergence de la suite (x_n) , puis un équivalent simple de x_n .
3. Donner un développement asymptotique à trois termes de la suite (x_n) .

Exercice 13. Soit n un entier naturel non nul et soit le polynôme :

$$P_n = X(X - 1) \dots (X - n).$$

1. Montrer que le polynôme P'_n possède une unique racine dans l'intervalle $]0, 1[$; celle-ci sera notée x_n .
2. Étudier la monotonie de la suite (x_n) .
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$F = \frac{P'_n}{P_n}.$$

4. En déduire un équivalent de la suite (x_n) .

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de $e^{\frac{\ln x}{x}} - 1$ au voisinage $+\infty$.
3. En déduire un développement asymptotique à trois termes de f .
4. Le graphe de f admet-il une asymptote oblique en $+\infty$?