– TD 2 : Séries numériques –

Exercice 1. Séries de Bertrand.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On appelle série de Bertrand la série :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Montrer que la série de Bertrand converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Exercice 2. Séries semi-convergentes et produit de Cauchy.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Justifier que la série $\sum a_n$ est semi-convergente.
2. Montrer que le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est une série divergente.

Exercice 3. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

Exercice 4. On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 5. Série harmonique alternée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

2. En déduire la valeur de la somme de la série harmonique alternée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Exercice 6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ de : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}$.

Donner un équivalent simple de S_n . Puis, déterminer un développement asymptotique à 2 termes de S_n .

Exercice 7. Séries et transformation d'Abel.

1. Soit deux suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. On définit :

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Montrer que : $S_n = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k)$.

2. Soit z un nombre complexe de module 1. En utilisant la décomposition ci-dessus étudier la convergence de la série de terme général $\frac{z^n}{n}$ en discutant selon les valeurs du nombre z .

Exercice 8. La formule de Stirling.

Cet exercice a pour but de prouver l'existence d'une constante $K > 0$ telle que : $n! \sim K \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $v_n = \frac{n!}{n^n} e^n$ et $w_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que : $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. En déduire la nature de la série de terme général : $\ln w_{n+1} - \ln w_n$.

3. Conclure.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k}.$$

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de R_n .

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n .

Indication : on pourra étudier la suite auxiliaire $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$, et utiliser le théorème de sommation des relations de comparaison (cas divergent).

Exercice 11.

1. Montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}.$$

2. Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente. Montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$