– TD 3 : Structure de groupes –

Exercice 1. Morphisme de conjugaison.

Soit $(G, *)$ un groupe. Pour $a \in G$, on note t_a l'application de G vers G définie par $t_a(x) = a * x * a^{-1}$.

1. Montrer que t_a est un endomorphisme du groupe $(G, *)$.
2. Montrer que $t_a \circ t_b = t_{a*b}$ pour tout $(a, b) \in G^2$.
3. Montrer que t_a est un isomorphisme et exprimer son application réciproque.
4. En déduire que l'ensemble $T = \{t_a \mid a \in G\}$ muni de la loi $\circ$ est un groupe.
5. On considère f l'application de G dans T définie pour tout $a \in G$ par $f(a) = t_a$.
 - a. Expliquer rapidement pourquoi f est un morphisme de groupes de $(G, *)$ dans $(T, \circ)$.
 - b. Montrer que : $\text{Ker } f = \{a \in G \mid \forall x \in G, a * x = x * a\}$. Cet ensemble est appelé le *centre* de $(G, *)$.

Exercice 2. 1. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$.

2. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 3. Déterminer tous les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$. Lesquels sont injectifs ? surjectifs ?

Exercice 4. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 5. Soit G la partie de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ formée des matrices triangulaires supérieures inversibles. Montrer que G est un sous-groupe de $(\text{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Exercice 6. Montrer que l'ensemble G des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, est un groupe pour le produit matriciel. Puis, trouver le centre de G .

Exercice 7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x \\ 2x & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $G = \{M_x \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que G est un sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 8. Les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

1. Soit $\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ un élément du groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$. Déterminer l'ordre de ξ_k .
2. Soit $\bar{k}$ un élément du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Déduire de la question précédente l'ordre de $\bar{k}$.

Exercice 10. Soit a et b deux éléments d'ordre respectif p et q d'un groupe abélien $(G, *)$. On suppose que p et q sont premiers entre eux. Montrer que l'élément ab est d'ordre pq .

Exercice 11. On a vu en classe que tout élément d'un groupe fini est d'ordre fini. Mais existe-t-il un groupe infini dont tous les éléments sont d'ordre fini ?

Exercice 12. Déterminer les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Indication. On peut remarquer que si φ est un isomorphisme de groupes de G_1 dans G_2 , alors l'application $H \mapsto \varphi(H)$ est une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de G_1 et l'ensemble des sous-groupes de G_2 .

Exercice 13. Le théorème de Lagrange.

1. Soit H un sous-groupe de $(G, *)$ et soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie pour tout $(x, y) \in G^2$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1} * y \in H$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble G .

2. Dans toute cette question 2, on supposera que G est un groupe fini i.e. qu'il contient un nombre fini p d'éléments. Comme H est une partie de G , on en déduit que H contient un nombre fini q d'éléments avec $q \leq p$. On notera : $H = \{h_1, \dots, h_q\}$.

- Soit $x \in G$. Montrer que la classe d'équivalence de x , notée $\bar{x}$, vérifie : $\bar{x} = \{x * h_1, \dots, x * h_q\}$.
- Soit $x \in G$. Montrer que $\bar{x}$ contient q éléments distincts.
- En déduire que q divise p .
- Retrouver le théorème de Lagrange vu en classe.

Exercice 14. Montrer qu'un groupe à p éléments avec p premier est cyclique engendré par n'importe lequel de ses éléments différents de e .

Exercice 15. Soit $(G, *)$ un groupe cyclique d'ordre n (i.e. de cardinal n) et soit a un générateur de G . Déterminer tous les sous-groupes H de G . On prouvera qu'ils sont cycliques, et on précisera leur ordre.

Exercice 16. Soit $n \geq 2$ et τ une transposition.

- Montrer que l'application $f : \sigma \mapsto \sigma\tau$ est une bijection de $\mathcal{A}_n$ dans un ensemble à préciser.
- En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$.

Exercice 17. On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe $(G, *)$ est *normal* ou *distingué* dans G s'il vérifie :

$$\forall h \in H, \forall x \in G, \quad xhx^{-1} \in H.$$

1. Soit f un morphisme d'un groupe G dans un groupe G' . Montrer que le noyau de f est un sous-groupe distingué de G .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que le *groupe alterné* $\mathcal{A}_n$ désigne l'ensemble des permutations paires (i.e. de signature égale à 1) de $\mathcal{S}_n$.

- Montrer que le *groupe alterné* $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$.
- Soit a, b, c, d des entiers distincts de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $(ab)(bc)$ est un 3-cycle et que $(ab)(cd)$ est un produit de deux 3-cycles.
- En déduire que $\mathcal{A}_n$ est engendré par l'ensemble des 3-cycles.
- Soit $n \geq 5$. Soit (a, b, c) et (α, β, γ) deux 3-cycles. Prouver l'existence d'une permutation paire σ telle que : $\sigma(a, b, c)\sigma^{-1} = (\alpha, \beta, \gamma)$.
- Soit $n \geq 5$ et soit H un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_n$. Montrer que si H contient un 3-cycle, alors $H = \mathcal{A}_n$.