– TD 4 : Topologie des espaces vectoriels normés (Partie I) –

Exercice 1. Montrer que l'application $N_1 : P \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que l'application $N_2 : P \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |P(t) - P'(t)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. Soit N_1 et N_2 deux normes sur un même $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On suppose que les boules unités fermées des normes N_1 et N_2 sont identiques. Montrer que ces deux normes sont égales.

Exercice 3. On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable, c'est-à-dire telles que la série de terme général $|u_n|^2$ converge. Pour tout $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ on pose :

$$\|u\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Montrer que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et que $\|\cdot\|$ est une norme sur cet espace.

Exercice 4. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\|A\| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|.$$

Montrer (efficacement) que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis prouver qu'elle vérifie :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

⚠ Une norme vérifiant cette inégalité, est qualifiée de *norme d'algèbre* ou *norme sous-multiplicative*.

Exercice 5. Norme de Frobenius sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

1. Prouver que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

2. On suppose maintenant $n = p$. Montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sous-multiplicative.

Exercice 6. On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\cdot\|$.

1. Soit (A_n) et (B_n) deux suites d'éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui convergent respectivement vers A et B . Montrer que la suite $(A_n \times B_n)$ converge vers $A \times B$.

2. À quelle condition sur $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ existe-t-il $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $M^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A$?

Exercice 7. On munit chacun des espaces $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ de la norme infinie notée $\|\cdot\|_{\infty}$. On considère deux suites (A_n) et (B_n) à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On suppose que (A_n) et (B_n) convergent respectivement vers A et B . Montrer que la suite $(A_n \times B_n)$ converge vers $A \times B$.

⚠ On verra que ce résultat est vrai quels que soient les normes utilisées.

Exercice 8. Déterminer la frontière de $\mathbb{Q}$.

Exercice 9. Soit A et B deux parties d'un evn. Montrer que $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \text{Int}(A \cap B)$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \text{Int}(A \cup B)$. Donner un exemple où cette deuxième inclusion est stricte.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée dont toutes les suites extraites convergentes ont la même limite. Démontrer que la suite (u_n) converge. *Indication : on pourra se rappeler du théorème de Bolzano-Weierstrass.*

Exercice 11. Soit (a_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E , et qui converge vers un élément a de E . Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble :

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

est un fermé de E . Soit $b \in E \setminus A$.

1. Prouver l'existence d'un réel $r > 0$ tel que $B(a, r)$ et $B(b, r)$ soient disjointes.
2. En déduire l'existence d'un réel $s > 0$ tel que $B(b, s) \subset E \setminus A$. Conclure.

Exercice 12. Soit F une partie fermée non vide d'un evn E et $x \in E$. Montrer que : $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

Exercice 13. Soit A et B deux parties quelconques d'un espace vectoriel normé E . On note :

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

1. Montrer que lorsque A est ouvert (et B quelconque), la partie $A + B$ est ouverte.
2. Montrer que lorsque A est fermée, et b un élément de E , la partie $A + \{b\}$ est fermée.

$\triangle$ On verra plus tard qu'on peut trouver des parties fermées A et B telles que $A + B$ ne soit pas fermée.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que si F est ouvert alors $F = E$.
2. Montrer que, plus généralement, si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ alors $F = E$.

Exercice 15. Soit U et V deux parties denses d'un espace vectoriel normé E . On suppose, de plus, que U est ouvert. Montrer que $U \cap V$ est dense.

Exercice 16.

1. Montrer qu'un hyperplan H d'un espace vectoriel normé E est soit fermé soit dense.
2. On considère maintenant $E = \mathcal{C}([0, 1])$ et $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
 - a. Justifier efficacement le fait que H est un hyperplan de E .
 - b. Montrer que si l'on munit E de la norme infinie, alors H est une partie fermée de E .
 - c. Montrer que si l'on munit E de la norme un, alors H est une partie dense de E . On pourra considérer, pour tout élément $f \in E$ la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\forall x \in [0, 1], u_n(x) = \begin{cases} (n+1)x f(\frac{1}{n+1}) & \text{si } x \leq \frac{1}{n+1} \\ f(x) & \text{si } x > \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

Exercice 17. Montrer que si $E \neq \{0\}$, alors, pour toute partie finie M de E , $E \setminus M$ est dense dans E .

Exercice 18. Soit l'espace $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1]) \mid f(0) = 0\}$ et N_1 et N_2 les applications définies sur E par :

$$N_1(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) + f'(t)|.$$

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $N_1(f)$ et $N_2(f)$ ont bien une valeur réelle.
2. Montrer que N_1 et N_2 sont bien des normes sur E .
3. Montrer l'existence d'un réel k tel que que $N_2 \leq kN_1$.
4. Montrer que pour tout $f \in E$ et $x \in [0, 1]$:

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t))e^t dt.$$

5. En déduire que N_1 et N_2 sont équivalentes.