– TD 5 : Structure d'anneaux –

Exercice 1. Soit $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux a au moins deux éléments, et soit f un morphisme d'anneaux de A dans B .

1. Montrer que l'image réciproque d'un sous-anneau de B par f est un sous-anneau de A .
2. Montrer que l'image directe d'un sous-anneau de A par f est un sous-anneau de B .
3. Montrer que l'image réciproque d'un idéal de B par f est un idéal de A .
4. Montrer que l'image directe d'un idéal de A par f est un idéal du sous-anneau $f(A)$.

Exercice 2. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de l'anneau des rationnels $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Montrer que l'anneau $\mathbb{D}$ est principal, i.e. que tous ses idéaux sont de la forme $a\mathbb{D}$ avec $a \in \mathbb{D}$.

Exercice 3. Résoudre le système suivant d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$(S) \quad \begin{cases} 3x \equiv 2 & [5] \\ 5x \equiv 1 & [6] \end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre l'équation $x^2 - \bar{5}x + \bar{6} = \bar{0}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n = 7$ puis $n = 12$.

Exercice 5. Montrer que le polynôme $P = X^3 + 3X^2 + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 6. Le polynôme $P = X^3 + \bar{2}X + \bar{3}$ est-il irréductible sur $\mathbb{F}_5[X]$?

Exercice 7. La fonction indicatrice d'Euler.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dénombrant les éléments d'ordre d dans le groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$, montrer que :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d),$$

où d parcourt les diviseurs positifs de n .

2. Dédurre de cette égalité une fonction python nommée `phi` prenant pour paramètre un élément $n \in \mathbb{N}^*$ et, qui à l'aide de cette égalité, calcule et retourne la valeur de $\varphi(n)$.

Exercice 8. Groupe des inversibles d'un corps fini.

On considère un corps fini $\mathbb{F}$. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe $(\mathbb{F}^\times, \times)$ des inversibles de $\mathbb{F}$ est un groupe cyclique.

1. Soit $x \in \mathbb{F}^\times$ un élément d'ordre $d \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{F}^\times$ vérifiant $y^d = 1$. Montrer que y appartient au groupe engendré par x .

Indication : on pourra considérer le polynôme $X^d - 1$ et admettre qu'il admet au plus d racines distinctes.

2. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note $N(d)$ le nombre d'éléments d'ordre d dans $\mathbb{F}^\times$. Montrer que $N(d) \leq \varphi(d)$.

3. Conclure.

Exercice 9. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif contenant au moins deux éléments.

1. Soit I un idéal de $(A, +, \times)$. Montrer que si I contient un élément inversible de A , alors $1_A \in I$, puis que $I = A$.
2. Montrer que $(A, +, \times)$ est un corps si, et seulement si, ses seuls idéaux sont $\{0_A\}$ et A .
3. Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et $(B, +, \times)$ un anneau commutatif contenant au moins deux éléments. Montrer que tout morphisme d'anneau de $\mathbb{K}$ dans B est injectif.
4. On suppose que A est intègre et qu'il n'admet qu'un nombre fini d'idéaux. Démontrer que A est un corps.

Exercice 10. Déterminer les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Le groupe des inversibles $((\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times, \times)$ est-il cyclique ?

Exercice 11. Montrer que toute suite croissante d'idéaux de $\mathbb{Z}$ est stationnaire. Ce résultat est-il toujours vrai avec les idéaux de $\mathbb{K}[X]$?

$\triangle$ Un anneau commutatif dont toute suite d'idéaux croissante pour l'inclusion est stationnaire est appelé *anneau noethérien*, en hommage à la mathématicienne allemande Emmy NOETHER (1882-1935).

Exercice 12. Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre et fini. Montrer que $(A, +, \times)$ est un corps.

Exercice 13. Soit A un anneau, et P un élément de l'anneau $A[X]$. Montrer que P est nilpotent si, et seulement si, tous ses coefficients le sont.

Exercice 14. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout réel x , $P(x) \geq 0$.

Le but de cet exercice est de prouver l'existence d'un couple $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

1. Montrer que l'ordre de multiplicité de chaque racine réelle de P est un entier pair.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{A^2 + B^2 \mid (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2\}$ est stable par produit.
3. Conclure.