

– TD 7 : Révisions d'algèbre linéaire –

Exercice 1. On sait que la valeur de la dimension d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E dépend du choix du corps \mathbb{K} . Le but de cet exercice est de montrer que le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} est un espace vectoriel de dimension infinie.

On considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de tous les nombres premiers dans l'ordre croissant : $p_1 = 2, p_2 = 3 \dots$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(\ln(p_1), \dots, \ln(p_n))$ est libre.

Exercice 2. Soit l'application :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P. \end{aligned}$$

\triangleleft $P(X+1)$ désigne la composée de P par $X+1$, que l'on pourrait aussi noter $P \circ (X+1)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire $\text{Im}(\Delta)$.
4. Soit F l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$.
 - a. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
 - b. Montrer que : $F \oplus \text{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}[X]$.
 - c. Montrer que $\Delta|_F$ est un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}[X]$.
5. a. Montrer qu'il existe une unique suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $N_0 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} N_n(0) = 0 \\ \Delta(N_n) = N_{n-1}. \end{cases}$$

- b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = \frac{X(X-1) \cdots (X-n+1)}{n!}$.
- c. Montrer que (N_0, N_1, \dots, N_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les coordonnées de Q dans la base (N_0, N_1, \dots, N_n) sont :

$$(Q(0), \Delta(Q)(0), \Delta^2(Q)(0), \dots, \Delta^n(Q)(0)).$$

Exercice 3. Soit (a_1, \dots, a_n) des éléments de \mathbb{K} deux à deux distincts, et soit $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ les polynômes de Lagrange associés. Déterminer une expression simple du polynôme $P = \sum_{1 \leq j \leq n} L_j$.

Exercice 4. Soit (a_1, \dots, a_n) des éléments de \mathbb{K} deux à deux distincts, et soit $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ les polynômes de Lagrange associés.

1. Montrer que $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
2. Déterminer sa base duale.

Exercice 5. Diagonalisation d'un endomorphisme.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$u(P) = (1 - X^2)P'' - XP'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer le noyau de u .
3. Pour les questions 3.a. et 3.b. seulement, on pose $n = 3$.
 - a. Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique (notée \mathcal{B}) de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - b. Déterminer une base de $\text{Im } u$.
4. On définit $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P_{k+2} = 2XP_{k+1} - P_k.$$

- a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence, sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$P_k(\cos \theta) = \cos k\theta.$$

- b. Soit P un polynôme. On pose $Q = u(P)$. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$(P(\cos \theta))'' = Q(\cos \theta)$$

5. Montrer que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(P_k) = -k^2 P_k$.
6. Pour les questions 6.a. et 6.b. seulement, on pose à nouveau $n = 3$.
 - a. Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On la notera \mathcal{B}' .
 - b. Déterminer la matrice de u relativement à cette base \mathcal{B}' .

Exercice 6. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Soit f et g deux formes linéaires non-nulles définies sur E .

1. Démontrer qu'il existe $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$.
2. On suppose qu'il existe p formes linéaires f_1, \dots, f_p telles que :

$$\forall x \in E, (f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

Montrer que $\dim(E) \leq p$.