– TD 10 –
Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (2)

Exercice 1. Étudier la réduction dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la matrice suivante en fonction du paramètre $k \in \mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Trigonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal π_A de A.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par π_A.

3. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.

2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

3. En déduire, sans aucun calcul, le polynôme minimal π_A de A.

4. En s'inspirant de la méthode vue à l'exercice précédent, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Trigonaliser A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que la matrice A est de rang pair.

Exercice 6. Sous-espaces stables.

1. Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'un sev F non nul est stable par u si, et seulement si, il possède une base de vecteurs propres de u.

2. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser la matrice A, puis déterminer les sous-espaces vectoriels stables par son endomorphisme canoniquement associé, que l'on notera u.

Exercice 7. Sous-espaces stables. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une droite ou un plan stable par u.
Indication : on pourra utiliser le théorème de Caley-Hamilton.

Exercice 8. Sous-espaces stables. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M_\lambda \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & -\lambda \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par M_λ.

Exercice 9. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose l'existence d'un polynôme annulateur P tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. Montrer que l'image et le noyau de u sont supplémentaires de E.

Exercice 10. Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$ telles que $B = A^p$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, B l'est.

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^4 = -2A^3 - 2A^2$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 12. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 13.

1. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}[X] \\ A & \mapsto & \chi_A \end{array}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que si $n \geqslant 2$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}[X] \\ A & \mapsto & \pi_A \end{array}$ n'est pas continue en 0.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit T une matrice triangulaire inversible.

1. Montrer que T peut être reliée à I_n par un chemin à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 15. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - M^\mathsf{T} = \mathrm{I}_n$. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 16. Soit un entier $n \geqslant 2$ et a un réel. Soit L l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$L(M) = aM + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n.$$

1. Déterminer les éléments propres de L.

2. En déduire le polynôme minimal de L.

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme réel P_n vérifiant $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} P_n(x) + O(x^n)$.

2. Montrer que X^n divise le polynôme $P_n^2 - X - 1$.

3. Soit f un endomorphisme nilpotent de E. Montrer qu'il existe un endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = \mathrm{Id}_E + f$.

4. Soit f un endomorphisme de E ne possédant qu'une seule valeur propre λ. On suppose, de plus, λ non nulle. Montrer qu'il existe un endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = f$.

Exercice 18. Soit A une matrice carrée de taille 2 à coefficients entiers. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = \mathrm{I}_2$. Montrer que $A^{12} = \mathrm{I}_2$.