– Devoir d'été –

Cette feuille a été conçue dans le but d'orienter vos révisions pour préparer votre année de MP. Je vous demande de rédiger les solutions pour le lundi 1er septembre.

Certains de ces exercices seront posés lors du premier DS de mathématiques.

Pour toute question, vous pouvez me contacter à l'adresse : nicolas.hubert1@ac-versailles.fr

Exercice 1. Soit (u_n) une suite de réels.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $u_n \sim \frac{1}{n}$. Montrer que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$.

2. On suppose maintenant que (u_n) est décroissante et vérifie : $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$.

  a. Montrer que (u_n) converge vers 0^+.

  b. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que : $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$.

2. En déduire un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}.$$

Exercice 3. Un calcul de $\zeta(2)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ P_n(\operatorname{cotan}^2 t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$

2. Expliciter les racines de P_n et calculer leur somme.

3. En observant que $\operatorname{cotan}^2 t \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant 1+\operatorname{cotan}^2 t$ pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, déterminer la valeur de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 4. En salle 435, la température ambiante est de 20°C. Le café du prof de maths met 2 min pour passer d'une température de 80°C à 60°C. Combien de temps doit-il encore attendre pour le boire à une température de 40°C ?

Exercice 5. Formule d'inversion de Pascal - Nombre de surjections.

1. Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.

2. Pour n et p entiers naturels, on note $s_n(p)$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$. Montrer que $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} s_n(k)$. En déduire la valeur de $s_n(p)$.

Rappel. Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J, et dérivable sur I. Soit $y \in J$ et soit $x = f^{-1}(y)$.
Alors f^{-1} est dérivable en y si et seulement si $f'(x) \neq 0$. Et dans ce cas, on a:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - 1 - x\ln(x)$.

1. Déterminer le tableau de variations de f'.

2. Déterminer le tableau de variations complet (avec limites) de f.

3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle I à préciser.

4. Dresser le tableau de variations complet de f^{-1}, sans dériver, mais en justifiant.

5. Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} et calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Rappel. Soit f une fonction de E dans F. Soit A une partie de E et B une partie de F. On définit :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \quad \text{et} \quad f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Autrement-dit :
- Pour tout $y \in F$: $y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A,\ y = f(x))$.
- Pour tout $x \in E$: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

⚠ Ici l'écriture f^{-1} ne désigne pas la fonction réciproque et ne sous-entend pas que f est bijective.

Exercice 7. Soit f une fonction de E dans F.

1. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. Montrer que f est injective si, et seulement si, : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.

3. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$. Donner l'exemple d'une partie A de $\mathbb{R}$ telle que $A \neq f^{-1}(f(A))$.

⚠ Pour prouver que $A \neq f^{-1}(f(A))$ on donnera la valeur de $f(A)$ et de $f^{-1}(f(A))$.

Exercice 8. On cherche un trésor et on découvre une pièce contenant n coffres identiques. On note p la probabilité pour que l'ensemble de ces n coffres contienne le trésor. On a déjà ouvert $n-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il se trouve dans le dernier coffre ?

Exercice 9.

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués). Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

2. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 10. Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers.

1. On suppose que P admet une racine rationnelle que l'on écrit $r = \frac{p}{q}$ où p et q sont eux entiers premiers entre-eux. Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

2. Soit $P = 2X^3 - X^2 - 4X + 2$. Déterminer une racine rationnelle de P, puis en déduire sa factorisation en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

3. Le polynôme $P = X^3 + 5X + 2$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 11.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que α est une racine de P' d'ordre $m - 1$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé tel que $\deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Le polynôme $P = X^5 + \frac{5}{2}X^4 + 10X^3 + \sqrt{2}X^2 - 3X + 7$ est-il scindé dans $\mathbb{R}[X]$? Justifier.

Exercice 12. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par : $u(P) = XP' - P$.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, que l'on notera A.

On note $\mathcal{B}' = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$.

2. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera B.

4. On considère le vecteur $P = X^2 + 2$. Déterminer les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ en utilisant la matrice A, puis ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ en utilisant la matrice B. Ces deux résultats sont-ils cohérents ?

Exercice 13. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(1) = 0\}$.

1. Montrer rigoureusement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q'(1) \neq 0$. Montrer que $\text{Vect}\{Q\} \oplus F = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 14. Noyaux et images itérés.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

On définit par récurrence la valeur des itérés de f : $f^0 = \text{Id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ et plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{p+1} = f^p \circ f$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$K_p = \text{Ker } f^p \quad \text{et} \quad I_p = \text{Im } f^p.$$

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.

3. Montrer que $I_r = I_{r+1}$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p} \quad \text{et} \quad I_r = I_{r+p}.$$

4. Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.

Exercice 15. Endomorphisme nilpotent.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, et soit u un endomorphisme de E. On dit que u est *nilpotent* s'il existe un entier k tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que u est nilpotent si, et seulement

si, $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Indication : on utilisera le résultat de l'exercice précédent.

De même, on dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* s'il existe un entier k tel que $M^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Le résultat de l'exercice précédent s'adapte au cas des matrices carrés : pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M$ est nilpotente si, et seulement si, $M^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exercice 16. L'équation suivante, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, admet-elle des solutions ?

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix} \quad \text{où pour tout} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{on a} \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} i.$$

Exercice 18. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
1. Justifier rapidement que $\det A \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que A est un élément inversible de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), +, \times)$ si, et seulement si, $\det A = \pm 1$.

Exercice 19. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer leur trace, leur déterminant et leur rang.
2. Montrer que ces deux matrices sont équivalentes.
3. Montrer que les matrices $A - \mathrm{I}_3$ et $B - \mathrm{I}_3$ ne sont pas semblables.
4. En déduire que A et B ne sont pas semblables.

Exercice 20. Séries et transformation d'Abel.
1. Soit deux suites (a_n) et (b_n). On définit :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Montrer que : $S_n = a_n B_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k)$.
2. Soit z un nombre complexe de module 1. En utilisant la décomposition ci-dessus étudier la convergence de la série de terme général $\frac{z^n}{n}$ en discutant selon les valeurs du nombre z.

Exercice 21. Intégrales de Wallis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Calculer la valeur des intégrales I_0, I_1 et I_2.

La question suivante ne sera pas utile pour la suite de l'exercice :

2. À l'aide d'un changement de variables, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$. Pour ce faire, on pourra écrire $\cos^{n+2}(t) = \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)$.

4. En déduire les valeurs de I_3 et I_4.

5. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$

6. Déduire de la question 3, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+1) I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_{n+2}$. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

8. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.