– Chapitre 3 : Intégration sur un intervalle quelconque –

En MPSI, vous avez vu la construction de *l'intégrale de Riemann* d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

⚠ Le but de ce chapitre est d'étendre cette notion d'intégrale à un intervalle quelconque.

Sans mention contraire, les fonctions seront définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, et à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. INTÉGRATION SUR UN SEGMENT (RAPPELS).

Définition 1. Une fonction f définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite *continue par morceaux*, s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

1. la restriction $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$,

2. la restriction $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité à $[x_i, x_{i+1}]$.

Une telle subdivision est dite *adaptée* à f.

⚠ Le point 2 équivaut au fait que $\lim\limits_{x_i^+} f$ et $\lim\limits_{x_{i+1}^-} f$ existent et sont finies.

Notations. Nous noterons $\mathcal{CM}([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Remarque 1.

- $\mathcal{CM}([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}([a,b])$ des fonctions définies sur $[a,b]$.
- Toute fonction continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, i.e. $\mathcal{C}([a,b]) \subset \mathcal{CM}([a,b])$.
- Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, i.e. $\mathcal{E}([a,b]) \subset \mathcal{CM}([a,b])$.

Pour le moment les fonctions seront supposées à valeurs réelles.

Construction de l'intégrale de Riemann.

On rappelle la chronologie de la construction de l'intégrale de Riemann des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$:

1. On construit l'intégrale des fonctions en escalier sur $[a,b]$,

2. On étend ensuite la notion aux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, en utilisant le théorème d'approximation uniforme par une suite de fonctions en escalier.

⚠ On pourrait, sans plus de difficulté, définir l'intégrale de Riemann de n'importe quelle fonction qui soit limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$. Une telle fonction est dite *réglée* sur $[a,b]$. Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est réglée, mais pour se convaincre de l'intérêt de cette remarque, il faudrait prouver qu'il existe des fonctions réglées, qui ne sont pas continues par morceaux.

Proposition 1. L'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{CM}([a,b])$.

Proposition 2. Deux fonctions continues par morceaux f et g, qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points ont même intégrale.

Proposition 3. Relation de Chasles.
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, et soit $c \in]a, b[$.
Alors, f est continue par morceaux sur $[a, c]$ et $[c, b]$, et :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Proposition 4. Positivité et croissance de l'intégrale.
Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

1. Si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

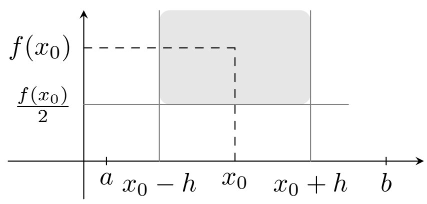
2. Si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Corollaire 1. Inégalité triangulaire.
Si f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $|f|$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Théorème 1. Soit f une fonction positive et continue sur $[a, b]$.
f n'est pas la fonction nulle si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b f > 0$.
Autrement-dit, $\displaystyle\int_a^b f = 0$ si, et seulement si, f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Démonstration. Si f est la fonction nulle, alors son intégrale est nulle.
Supposons que f n'est pas la fonction nulle i.e. qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$.
On va traiter le cas où $x_0 \in]a, b[$.



□

⚠ Ce résultat ne s'applique qu'aux fonctions continues. En effet, une fonction constante égale à zéro sauf en un nombre fini de points est d'intégrale nulle. Et réciproquement :

Corollaire 2. Soit f une fonction positive et continue par morceaux sur $[a, b]$.
$\displaystyle\int_a^b f = 0$ si, et seulement si, f constante égale à zéro sauf en un nombre fini de points.

Théorème 2. Théorème fondamental de l'analyse.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $a \in I$. La fonction F_a définie sur I par :
$$\forall x \in I,\ F_a(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$
est dérivable sur I, de dérivée $F_a' = f$.
Ainsi, F_a est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

⚠ Si f est continue par morceaux sur I, mais non continue, alors F_a n'est pas une primitive de f sur I. Plus généralement, si f est continue par morceaux sur I, mais non continue, alors f n'admet pas de primitive sur I. Autrement-dit :

Proposition 5. Si f est continue par morceaux sur I, admettant une primitive F sur I, alors f est continue sur I.

Pour la démonstration de cette proposition nous aurons besoin du théorème de la limite de la dérivée :

Rappel. Théorème de la limite de la dérivée.
Soit $x_0 \in I$. Soit f une fonction continue sur I, et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. Si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et :
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

Démonstration.

□

Corollaire 3. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.
Pour toute primitive F de f sur I, on a :
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Démonstration.

□

Théorème 3. Sommes de Riemann.
Pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b])$:
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

⚠ Si de plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors f' est bornée sur ce segment. En notant $M = \sup\limits_{[a,b]}|f'|$, on obtient la majoration suivante :
$$\left|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant$$

Théorème 4. Intégration par parties.
Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et soit $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$. Alors :
$$\int_a^b f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Théorème 5. Changement de variables.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que $\varphi([a,b]) \subset I$ alors :
$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\ \mathrm{d}y.$$

Théorème 6. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. On a alors :
$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2.$$
De plus, si f et g sont continues, il y a égalité si et seulement si (f,g) est liée.

Dans le cas des fonctions continues sur $[a,b]$, cette inégalité provient simplement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}([a,b])$ muni du produit scalaire défini par :
$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}([a,b])^2, \quad \langle f,g\rangle = \int_a^b fg.$$

Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ on peut lui associer deux fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, telles que : $f = \mathrm{Re}(f) + i\ \mathrm{Im}(f)$. On montre alors que f continue par morceaux sur $[a,b]$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
On définit alors :
$$\int_a^b f =$$

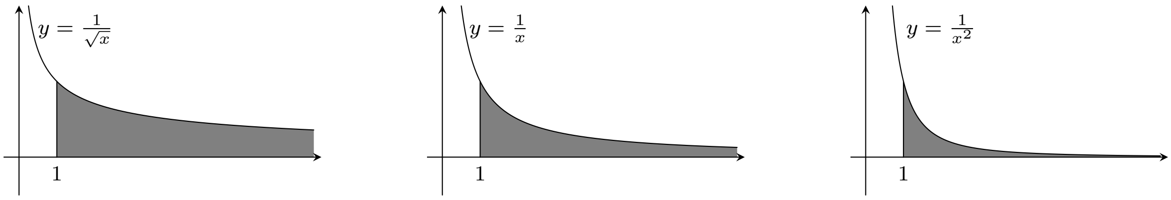
L'intégrale de Lebesgue (hors programme). Il existe une théorie de l'intégration autre que celle de l'intégrale de Riemann, appelée *l'intégrale de Lebesgue*. L'intérêt de cette théorie est que l'on va pouvoir intégrer beaucoup plus de fonctions que les seules fonctions réglées. On pourra, par exemple, calculer l'intégrale de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ (qui n'est pas réglée).

II. Intégration sur un intervalle quelconque.

On souhaite maintenant étendre la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux, et ses propriétés, à un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$.

On sait qu'un calcul d'intégrale sur un segment permet de mesurer l'aire d'un domaine délimitée par la courbe de la fonction et l'axe des abscisses. Bien que ce domaine ne soit plus borné, l'aire sous la courbe n'est pas nécessairement infinie.

On peut ainsi se demander si les 6 domaines suivants ont une aire finie :



II.1. Définition de l'intégrale sur un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Commençons par étendre la notion de fonction continue par morceaux :

Définition 2. Une fonction f définie sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite *continue par morceaux*, si la restriction de f à tout segment est continue par morceaux.

Pour la suite, on se contentera de traiter le cas d'un intervalle de la forme $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

Définissons maintenant la notion d'intégrale *impropre* ou d'intégrale *généralisée* à l'intervalle $[a, b[$.

Définition 3. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ est dite *convergente* si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-. Dans ce cas, on note : $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f$. Dans le cas contraire, cette intégrale est dite *divergente*.

On définit de même la notion d'intégrale impropre dans le cas où f est continue par morceaux sur un intervalle de la forme $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$.

⚠ Il y a principalement deux types d'intégrales impropres :

- le cas de fonctions non bornées sur un intervalle borné. Par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$,
- le cas où c'est l'intervalle qui est non borné. Par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

Exercice 1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{]0,1]} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et la calculer.

Exercice 2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{]0,1]} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice 4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque 2. Par définition, la convergence de $\int_{[a,b[} f$ où f est continue par morceaux sur $[a,b[$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de b. En particulier, pour tout $c \in]a,b[$, les intégrales $\int_{[a,b[} f$ et $\int_{[c,b[} f$ sont de même nature. Et en cas de convergence, on a la relation de Chasles :

$$\int_{[a,b[} f = \int_a^c f + \int_{[c,b[} f.$$

Proposition 6. Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors, l'intégrale généralisée $\int_{[a,b[} f$ converge et l'on a :

$$\int_{[a,b[} f = \int_a^b f.$$

⚠ On rappelle qu'une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Démonstration.

$\square$

Remarque importante.
Une conséquence de cette proposition est que, pour toute fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ dont l'intégrale généralisée converge, on notera indifféremment les quantités $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ et $\displaystyle\int_a^b f$.

Corollaire 4. Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ avec b réel et si f admet une limite finie en b, alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ converge et est égale à $\displaystyle\int_a^b \widetilde{f}$ où $\widetilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en b. Cette intégrale est alors dite *faussement impropre* en b.

Démonstration.

$\square$

Exemple 1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0.

II.2. Intégrales de référence.

Proposition 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si,

Démonstration.

$\square$

Proposition 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si,

Démonstration.

$\square$

Proposition 9. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration.

$\square$

Proposition 10. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si,

Démonstration.

$\square$

⚠ Comme le montre les exemples précédents, si f est continue sur $[a,b[$ et si f est une primitive de f, on a alors :

$$\int_{[a,b[} f \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow$$

II.3. Définition de l'intégrale sur un intervalle de la forme $]a, b[$.

Définition 4. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est dite *convergente* s'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent. Dans ce cas, on note :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dans le cas contraire, cette intégrale est dite *divergente*.

⚠ On peut comprendre que la convergence des deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ ne dépend pas du choix du réel $c \in]a, b[$.

Remarque importante.
Pour prouver la convergence de $\displaystyle\int_a^b f$ il faudra donc montrer l'existence des deux limites finies suivantes :

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^c f \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b^-} \int_c^x f$$

⚠ Pour prouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge, il ne suffit pas de calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} f$. En effet :

Exemple 2. Par imparité de la fonction $t \mapsto t^3$ on a :

Exemple 3. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

Exercice 5. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et la calculer.

II.4. Propriétés de l'intégrale généralisée.

Nous énonçons ici les propriétés dans le cas des intervalles de la forme $[a,b[$.

Proposition 11. Linéarité de l'intégrale.
Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ et soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$.
Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^b(\alpha f+\beta g)$ converge et :

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g.$$

Démonstration. Conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale sur un segment et de linéarité de la limite. □

⚠ Comme pour les séries, il se peut que $\int_a^b(f+g)$ converge sans que les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent.

Proposition 12. Positivité et croissance de l'intégrale.
Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ telles que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent.

1. Si $f\geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f\geqslant 0$.

2. Si $f\leqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^b f\leqslant\int_a^b g$.

Démonstration.

□

Théorème 7. Soit f une fonction positive et continue sur $[a,b[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.
Alors $\displaystyle\int_a^b f=0$ si, et seulement si, f est identiquement nulle sur $[a,b[$.

II.5. Divergence grossière.

On sait que lorsqu'une série numérique $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mais ce résultat ne demeure pas pour les intégrales impropres : l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ peut converger sans que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

Exemple 4.

Cependant :

Proposition 13. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ telle que f admette une limite $\ell \neq 0$ en $+\infty$. Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Démonstration.

□

⚠ Ce résultat est évidemment propre au cas où $b = +\infty$. En effet, dans le cas où f est continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$, si f admet en b une limite finie ℓ, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge ; c'est ce qu'on a appelé une intégrale faussement impropre.

III. Intégrale impropre d'une fonction à valeurs positives.

Comme dans le cas des séries à terme général positif, lorsque f est à valeurs réelles positives, certaines règles permettent d'étudier facilement la nature de l'intégrale.

Remarque importante. Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ et positive, alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $[a, b[$.

Proposition 14. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ et positive. Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement s'il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que :

$$\forall x \in [a, b[, \quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M.$$

Démonstration.

□

On obtient aussi que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge si et seulement si :

Dans ce cas on s'autorisera à écrire :

Proposition 15. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que : $0 \leqslant f \leqslant g$.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

Démonstration.

□

Corollaire 5. Soit f et g continues par morceaux sur $[a, b[$ positives et telles que : $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

⚠ Cette proposition reste en particulier vraie si $f \underset{b}{=} o(g)$. Elle reste également vraie si f n'est pas positive. C'est la positivité de g qui est importante.

Démonstration.

□

Pour des raisons pratiques, on utilisera souvent le résultat suivant :

Corollaire 6. Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.

Si $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

Démonstration.

□

Exercice 6. Établir la convergence de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

De même :

Corollaire 7. Soit f continue par morceaux sur $]0,1]$.

Si $f(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha < 1$, alors $\displaystyle\int_0^{1} f$ converge.

Corollaire 8. Soit f et g continues par morceaux sur $[a,b[$ positives et telles que : $f \underset{b}{\sim} g$.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b g$ converge.

Démonstration.

□

Le théorème de comparaison série-intégrale se reformule à l'aide des intégrales impropres :

Théorème 8. Théorème de comparaison série-intégrale.
Soit $a \in \mathbb{N}$ et f une fonction positive, continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et décroissante.

Alors la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant a} f(n)$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

Démonstration.

□

IV. Intégration par parties et changement de variables.

IV.1. Intégration par parties.

Théorème 9. Intégration par parties.
Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$. Si $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x)$ existe et est finie alors, les intégrales :
$$\int_a^b f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t$$
sont de même nature. Et lorsqu'elles convergent :
$$\int_a^b f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t,$$
où $\big[f(t)g(t)\big]_a^b$ désigne $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a)$.

⚠ Le théorème s'adapte facilement au cas où les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.

Démonstration.

□

Exercice 7. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer sa valeur.

IV.2. Changement de variables.

Théorème 10. Changement de variables.
Soit f une fonction continue sur $[a,b[$, et soit $\varphi : [\alpha,\beta[\to [a,b[$ une fonction bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\ \mathrm{d}x$$

sont de même nature et égales en cas de convergence.

⚠ Le théorème s'adapte facilement au cas où f est continue sur $]a,b[$.

Démonstration.

□

Exercice 8.

1. En effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\ \mathrm{d}x$.

2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

Remarque importante. Le théorème s'adapte facilement au cas où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement décroissante de $]\alpha, \beta]$ dans $[a, b[$. Lorsque les intégrales convergent, on obtient alors :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t =$$

Exercice 9. Établir la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\ \mathrm{d}t$.

La structure de la fin de ce chapitre est similaire à l'étude des séries numériques :
- intégrales absolument convergentes,
- intégration des relations de comparaison.

V. Intégrale absolument convergente et fonction intégrable.

Définition 5. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est *absolument convergente* lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.
On dit aussi que f est *intégrable* sur $[a, b[$.

Théorème 11. Toute intégrale absolument convergente est convergente.

Démonstration.

□

Définition 6. Une fonction f est dite *intégrable sur* $[a, b[$ si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ et si $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente.

Remarque 7. On utilisera indifféremment les expressions :
« f est intégrable sur $[a, b[$ » et « l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument ».
Plus précisément, on pourra dire que f est :
- *intégrable en* b si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ et si $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument converge.
- *intégrable en* a si f est continue par morceaux sur $]a, b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument converge.

Pour déterminer l'intégrabilité en a ou en b de f, on pourra toujours se ramener en 0. Plus précisément :

Proposition 16. La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

Remarque 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si,

Proposition 17. Inégalité triangulaire.
Si f une fonction intégrable sur $[a, b[$, alors :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Démonstration.

□

Proposition 18. L'espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Démonstration.

□

Définition 7. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est *semi-convergente*, si $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente, mais non absolument convergente.

Exercice 10. L'intégrale de Dirichlet.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

VI. Intégration des relations de comparaison.

Comme pour les séries, nous allons voir deux théorèmes ; non pas de sommation mais d'intégration des relations de comparaison :

- un dans le cas convergent, qui donne alors une information sur « le reste »,

- un dans le cas divergent, qui donne alors une information sur « l'intégrale partielle ».

Proposition 19. Intégration des relations de comparaison - Cas convergent.

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$.

On suppose que g est intégrable et de signe constant.

1. Si $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f \underset{b}{=} \mathcal{O}\left(\int_x^b g\right)$,

2. Si $f \underset{b}{=} o(g)$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f \underset{b}{=} o\left(\int_x^b g\right)$,

3. Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f \underset{b}{\sim} \int_x^b g$.

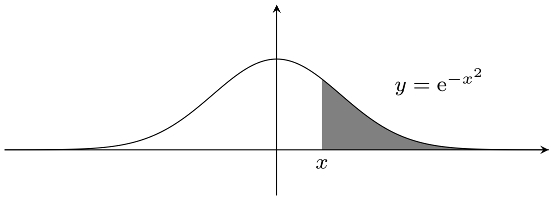
Démonstration.

$\square$

Exercice 11. Équivalent du « reste » de l'intégrale de Gauss.

Nous calculerons, plus tard la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

On se propose ici de prouver : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$



Proposition 20. Intégration des relations de comparaison - Cas divergent.

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$.

On suppose que g est non intégrable et de signe constant.

1. Si $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$, alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{b}{=} \mathcal{O}\left(\int_a^x g\right)$,

2. Si $f \underset{b}{=} o(g)$, alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{b}{=} o\left(\int_a^x g\right)$,

3. Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est non intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_a^x f \underset{b}{\sim} \int_a^x g$.

⚠ Dans les deux premiers cas, on ne peut pas conclure quant à la convergence de l'intégrale $\int_a^b f$.

Démonstration.

□

Exemple 5. Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ telle que f admette une limite finie ℓ en $+\infty$.

Exercice 12. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de : $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.