– TD 2 : Séries numériques –

Exercice 1. Séries géométriques dérivées.
À l'aide d'un produit de Cauchy, prouver la convergence absolue de la série géométrique dérivée première et dérivée seconde dans le cas $|z| < 1$ et calculer leur somme respective.

Exercice 2. Séries semi-convergentes et produit de Cauchy.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Justifier que la série $\sum a_n$ est semi-convergente.

2. Montrer que le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est une série divergente.

Exercice 3. Séries de Bertrand.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On appelle série de Bertrand la série : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Montrer que la série de Bertrand converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Exercice 4. Après avoir montré la convergence de la série, montrer que la somme suivante est un réel négatif :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}.$$

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Déterminer un équivalent de R_n en utilisant une comparaison série-intégrale.

Exercice 6. On considère la série : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel à déterminer.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

3. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 7. Série harmonique alternée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

2. En déduire la valeur de la somme de la série harmonique alternée : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 8. Séries et transformation d'Abel.

1. Soit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$. On définit : $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Montrer que : $S_n = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k)$.

2. En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. La formule de Stirling.

Cet exercice a pour but de prouver l'existence d'une constante $K > 0$ telle que : $n\,! \sim K\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $v_n = \dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^n$ et $w_n = \dfrac{v_n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que : $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. En déduire la nature de la série de terme général : $\ln w_{n+1} - \ln w_n$. Conclure.

Exercice 10. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Même question avec : $v_n = \dfrac{u_n}{u_1 + \cdots + u_n}$.

Indication : on pourra étudier $\ln(1 - v_n)$ *dans le cas où la série de t.g.* u_n *diverge.*

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k}.$$

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de R_n.

Exercice 12. Soit (u_n) une suite de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}.$$

Déterminer sa limite puis un développement asymptotique de précision $o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

3. En déduire un équivalent de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 14.

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

2. Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.