– Programme de colle n° 2 : du 22 au 26/09/25 –

- Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.
- Les démonstrations à connaître sont indiquées par le symbole ✎
- Le premier exercice portera sur les séries numériques, mais uniquement pour des recherches de développement asymptotique en utilisant les théorèmes de sommation des relations de comparaison, ou des comparaisons série-intégrale. En deuxième exercice, on pourra poser un exercice simple sur les intégrales généralisées (voir ci-dessous).

– Chapitre 3 : Intégration sur un intervalle quelconque –

I. Intégration sur un segment (rappels).

Si f une fonction positive et continue sur $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f = 0$ si, et seulement si, f est identiquement nulle.

Théorème fondamental de l'analyse.

Théorème de la limite de la dérivée.

Sommes de Riemann, avec majoration de l'erreur dans le cas $\mathcal{C}^1$.

II. Intégration sur un intervalle quelconque.

Définition de l'intégrale sur un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Intégrales de référence :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt \qquad \int_0^1 \ln t\, dt \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$$ ✎

Intégrale faussement impropre.

Linéarité de l'intégrale.

⚠ Comme pour les séries, il se peut que $\int_a^b (f+g)$ converge sans que les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent.
Positivité et croissance de l'intégrale.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ telle que f admette une limite $\ell \neq 0$ en $+\infty$. Alors, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge. ✎

⚠ L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ peut converger mais si f n'a pas de limite en $+\infty$. Cependant, si f a une limite en $+\infty$ celle-ci doit nécessairement être nulle pour quel 'intégrale converge.

III. Intégrale impropre d'une fonction à valeurs positives.

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ et positive, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est croissante sur $[a, b[$. Ainsi, l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ converge si et seulement s'il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que : $\forall x \in [a, b[,\ \int_a^x f(t)\, dt \leqslant M$.

Soit f et g continues par morceaux sur $[a, b[$ avec g positive et telles que : $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$. Si l'intégrale $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.

Soit f et g continues par morceaux sur $[a, b[$ positives et telles que : $f \underset{b}{\sim} g$. Alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge si, et

seulement si, $\int_a^b g$ converge.
Théorème de comparaison série-intégrale.

IV. Intégration par parties et changement de variables.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer sa valeur. ✎

En effectuant le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$. ✎

V. Intégrale absolument convergente et fonction intégrable.

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

Une fonction f est dite *intégrable sur* $[a, b[$ si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ et si $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente.
Inégalité triangulaire pour une fonction intégrable.
L'espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente. ✎

VI. Intégration des relations de comparaison.

Intégration des relations de comparaison - Cas convergent. ✎

Équivalent du « reste » de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$. ✎

Intégration des relations de comparaison - Cas divergent.

Savoir déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de : $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$. ✎