– TD 3 : Intégration sur un intervalle quelconque –

Exercice 1. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t,\qquad \int_0^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\qquad \int_1^{+\infty}\frac{t+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t,\qquad \int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t,\qquad \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t\arctan t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. Prouver que l'intégrale suivante converge, puis calculer sa valeur :

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3. À l'aide d'un changement de variables, montrer que la fonction $f : x\mapsto \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 4. Prouver la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+3t+2},\qquad \int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t,\qquad \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,\qquad \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)},\qquad \int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5. Intégrale de Wallis - Intégrale de Gauss.

1. Montrer que pour tout réel t : $1-t^2\leqslant \mathrm{e}^{-t^2}\leqslant\frac{1}{1+t^2}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Établir l'existence des intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,\qquad I_n=\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t,\qquad J_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n},$$

et montrer l'encadrement : $I_n\leqslant\frac{I}{\sqrt{n}}\leqslant J_n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis par :

$$W_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n=W_{2n+1}$ et $J_{n+1}=W_{2n}$.

4. Montrer que la suite définie par : $u_n=(n+1)W_nW_{n+1}$ est constante.

5. Déterminer un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I.

Exercice 6. Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de :

$$I_n=\int_0^1(\ln t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$.

1. Montrer que les deux intégrales ci-dessous sont convergentes et égales :

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\ \text{ et }\ \int_0^{+\infty}\frac{f(1/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Application. Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^n)}\,\mathrm{d}t, \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 8. Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad a>0.$$

Exercice 9. Déterminer un développement asymptotique à 3 termes au voisinage de $+\infty$ de l'expression :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10. Après en avoir justifié l'existence, calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 11. Calculer la valeur de :

$$\int_0^1 \arcsin\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 12. Sommes de Riemann.

Soit $f:[a,b[\to \mathbb{R}_+$ continue et croissante, avec $a<b$. On note : $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.

1. On suppose que $\int_a^b f$ converge. Montrer que (S_n) converge vers $\int_a^b f$.

2. On suppose que $\int_a^b f$ diverge. Montrer que (S_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 13. Soit f continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est finie si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est finie. Montrer que, dans ce cas, ces limites sont égales.

Exercice 14. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ et non intégrable. On suppose : $f'(x) \underset{+\infty}{=} o(f(x))$. Montrer que : $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 15. L'intégrale de Dirichlet.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Pour tout entier n, on définit :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n et J_n sont bien définis.

2. Montrer que la suite (I_n) est constante et en déduire la valeur de I_n.

3. Soit ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Montrer, à l'aide d'une IPP, que : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \phi(t)\sin\big((2n+1)t\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Montrer que la fonction $t\mapsto \frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

5. En déduire que $J_n - I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. Montrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I$.

7. En déduire la valeur de I.