– Programme de colle n° 3 : du 29/09 au 03/10 –

- Les questions de cours portent sur le chapitre 4 : Structure de groupe.
- Les exercices portent uniquement sur le chapitre 3 : Intégration sur un intervalle quelconque. On posera, en particulier, des exercices faisant appel aux théorèmes d'intégration des relations de comparaison, notamment dans le but d'obtenir des développements asymptotiques.

Chapitre 4 - Structure de groupe.

cours uniquement

I. Rappels sur les groupes.

Définition, exemples. Groupe produit. Notion de sous-groupe. Morphisme de groupes.

Soit f un morphisme de G dans G'. Si H est un sous-groupe de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe de G' ; et si H' est un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G. ✎

Noyau et image d'un morphisme de groupes.

Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes.

II. Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe.

III. Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Une partie H de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$. ✎

IV. Groupe monogène, groupe cyclique.

V. Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique engendré par $\overline{1}$.

De plus, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, la classe $\overline{a}$ de a engendre le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, $a \wedge n = 1$. ✎

VI. Ordre d'un élément d'un groupe.

Soit $a \in G$ et soit φ l'application :

$$\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & G \\ k & \mapsto & a^k. \end{array}$$

Savoir énoncer et démontrer tous les points qui suivent : ✎

1. φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, *)$,

2. $\mathrm{Im}(\varphi) = \langle a \rangle$,

3. a est un élément d'ordre fini si, et seulement si, φ est non injective.

Si a est d'ordre fini d : ✎

1. $\mathrm{Ker}(\varphi) = d\,\mathbb{Z}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a^n = e \Leftrightarrow d \mid n$.

3. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $n \equiv m \; [d] \;\Leftrightarrow\; a^n = a^m$.

4. $\langle a \rangle = \{e, a, \ldots, a^{d-1}\}$, et les éléments de l'ensemble $\{e, a, \ldots, a^{d-1}\}$ sont 2 à 2 distincts.

Théorème de Lagrange : l'ordre d'un élément d'un groupe fini divise l'ordre du groupe. ✎

VII. Structure des groupes monogènes.

Théorème de structure des groupes monogènes. ✎
Générateurs de $(\mathbb{U}_n, \times)$. Notion de racine *primitive* n-ème de l'unité.

VIII. Groupe symétrique.

VIII.1. Permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

VIII.2. Décomposition d'une permutation.

VIII.3. Signature d'une permutation. Groupe alterné.