

– TD 4 : Structure de groupes –

Exercice 1. 1. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$.

2. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 2. Déterminer tous les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$. Lesquels sont injectifs ? surjectifs ?

Exercice 3. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 4. Soit G la partie de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ formée des matrices triangulaires supérieures inversibles. Montrer que G est un sous-groupe de $(\text{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Exercice 5. Montrer que l'ensemble G des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, est un groupe pour le produit matriciel. Puis, trouver le centre de G .

Exercice 6. Les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

1. Soit $\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ un élément du groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$. Déterminer l'ordre de ξ_k .

2. Soit $\bar{k}$ un élément du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Dédurre de la question précédente l'ordre de $\bar{k}$.

Exercice 8. Déterminer les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Indication. On peut remarquer que si φ est un isomorphisme de groupes de G_1 dans G_2 , alors l'application $H \mapsto \varphi(H)$ est une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de G_1 et l'ensemble des sous-groupes de G_2 .

Exercice 9. Le théorème de Lagrange.

1. Soit H un sous-groupe de $(G, *)$ et soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie pour tout $(x, y) \in G^2$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1} * y \in H$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble G .

2. Dans toute cette question 2, on supposera que G est un groupe fini i.e. qu'il contient un nombre fini p d'éléments. Comme H est une partie de G , on en déduit que H contient un nombre fini q d'éléments avec $q \leq p$. On notera : $H = \{h_1, \dots, h_q\}$.

a. Soit $x \in G$. Montrer que la classe d'équivalence de x , notée $\bar{x}$, vérifie : $\bar{x} = \{x * h_1, \dots, x * h_q\}$.

b. Soit $x \in G$. Montrer que $\bar{x}$ contient q éléments distincts.

c. En déduire que q divise p .

d. Retrouver le théorème de Lagrange vu en classe.

Exercice 10. Soit $(G, *)$ un groupe cyclique d'ordre n (i.e. de cardinal n) et soit a un générateur de G . Déterminer tous les sous-groupes H de G . On prouvera qu'ils sont cycliques, et on précisera leur ordre.

Exercice 11. Soit $n \geq 2$ et τ une transposition. Montrer que l'application $f : \sigma \mapsto \sigma\tau$ est une bijection de $\mathcal{A}_n$ dans un ensemble à préciser. En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$.

Exercice 12. On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe $(G, *)$ est *normal* ou *distingué* dans G s'il vérifie :

$$\forall h \in H, \forall x \in G, \quad xhx^{-1} \in H.$$

1. Soit f un morphisme d'un groupe G dans un groupe G' . Montrer que le noyau de f est un sous-groupe distingué de G .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que le *groupe alterné* $\mathcal{A}_n$ désigne l'ensemble des permutations paires (i.e. de signature égale à 1) de $\mathcal{S}_n$.
 - a. Montrer que le *groupe alterné* $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$.
 - b. Soit a, b, c, d des entiers distincts de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $(ab)(bc)$ est un 3-cycle et que $(ab)(cd)$ est un produit de deux 3-cycles.
 - c. En déduire que $\mathcal{A}_n$ est engendré par l'ensemble des 3-cycles.
 - d. Soit $n \geq 5$. Soit (a, b, c) et (α, β, γ) deux 3-cycles. Prouver l'existence d'une permutation paire σ telle que $\sigma(a, b, c)\sigma^{-1} = (\alpha, \beta, \gamma)$.
 - e. Soit $n \geq 5$ et soit H un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_n$. Montrer que si H contient un 3-cycle, alors $H = \mathcal{A}_n$.

Exercice 13. Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement. On suppose que le groupe G est cyclique et note a un générateur de G .

1. Soit b un élément de G' . Montrer qu'il existe un morphisme φ de G dans G' vérifiant $\varphi(a) = b$ si, et seulement si, b est un élément d'ordre fini divisant celui de a .
2. Combien existe-t-il d'endomorphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$?
3. Combien existe-t-il de morphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$?

Exercice 14. Soit G un groupe et $x \in G$ un élément d'ordre n . Quel est l'ordre de x^2 ?

Exercice 15. Montrer qu'un groupe à p éléments avec p premier est cyclique engendré par n'importe lequel de ses éléments différents de e .

Exercice 16. Soit $(G, *)$ un groupe de neutre e .

1. Soit a et b deux éléments de G d'ordres respectifs m et n , tels que $ab = ba$.
 - a. Montrer que si m et n sont premiers entre eux, alors ab est d'ordre mn .
 - b. Si m et n ne sont pas 1^{ers} entre eux, alors ab est-il nécessairement d'ordre mn ? d'ordre $m \vee n$?

Désormais G est supposé fini et commutatif, de neutre e .

2. On note m le ppcm des ordres des éléments de G et $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_d^{\alpha_d}$ sa décomposition en facteurs premiers, où $d, p_1, \dots, p_d$ sont des éléments de $\mathbb{N}^*$.
 - a. Soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Montrer que G admet un élément d'ordre $p_i^{\alpha_i}$.
 - b. Montrer que G admet un élément d'ordre m .
 - c. Qu'en est-il si G n'est plus supposé commutatif ?
3. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que tout sous-groupe fini de $(\mathbb{K}^\times, \times)$ est cyclique.

Exercice 17. Classification des petits groupes.

1. Soit G un groupe fini tel que pour tout $x \in G, x^2 = e$.
 - a. Montrer que G est abélien. Dorénavant, on notera donc $+$ la loi du groupe, et 0 l'élément neutre.
 - b. On définit une loi de composition externe en posant, pour tout $x \in G : \bar{0} \cdot x = 0$ et $\bar{1} \cdot x = x$. Montrer que $(G, +, \cdot)$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel.
 - c. En déduire l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.
2. Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes finis de cardinal inférieur ou égal à 7.