– Chapitre 6 –
Topologie des espaces vectoriels normés - Partie I

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps des réels ou le corps des complexes.

I. Normes et espaces vectoriels normés.

I.1. Normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1. On appelle *norme* sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, toute application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant

1. $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (séparation)

2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (homogénéité)

3. $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

La réciproque de la propriété de séparation est vraie.
En effet, $\|0_E\| =$

Notations. Une norme peut parfois être notée N au lieu de $\|.\|$. On note alors $N(x)$ au lieu de $\|x\|$.

Définition 2. On appelle *espace vectoriel normé* tout couple $(E, \|.\|)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\|.\|$ une norme sur E.

Exemple 1. La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, et le module est une norme sur $\mathbb{C}$. De manière générale, on pourra dire que pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le couple $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est un espace vectoriel normé. Sauf mention contraire, la norme utilisée sur $\mathbb{K}$ sera $|\cdot|$.

Proposition 1. Seconde inégalité triangulaire.
Pour tout $(x,y) \in E^2,\ \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leqslant \|x - y\|$.

Démonstration.

□

Définition 3. Un vecteur d'un espace vectoriel normé E est dit *unitaire* s'il est de norme 1.

Remarque 1. Pour tout vecteur non nul x de E, le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

Définition 4. On appelle *distance associée* à la norme d'un espace vectoriel normé E, l'application de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = \|x - y\|.$$

Proposition 2. La distance associée à une norme vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)

2. $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie)

3. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire)

4. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ |d(x,y) - d(x,z)| \leqslant d(y,z)$ (seconde inégalité triangulaire).

Démonstration.

□

Définition 5. Soit x un élément de E et A une partie non vide de E. On appelle distance de x à A et on note $d(x,A)$ le réel défini par :

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}.$$

Démonstration. Montrons l'existence de cette borne inférieure.

□

Remarque 2. Dans le cas où $x \in A$ alors $d(x,A) = 0$, mais on peut trouver des exemples où $d(x,A) = 0$ sans que $x \in A$. Par exemple :

Plus généralement, la distance $d(x,a)$ n'est pas nécessairement atteinte i.e. qu'il n'existe pas nécessairement d'élément $a \in A$ tel que $d(x,A) = d(x,a)$.

Proposition 3. Produit fini d'espaces vectoriels normés.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. L'application $\|.\|$ définit par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ \|x\| = \max\{N_1(x_1), \dots, N_p(x_p)\},$$

est une norme sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} E_k$.

Cette norme est appelée la *norme produit*.

Démonstration.

□

I.2. Boules fermées, boules ouvertes, sphères.

Définition 6. Soit a un point de E et un réel $r > 0$.
On appelle *boule ouverte* de centre a et de rayon r, la partie :

$$B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\} = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}.$$

On appelle *boule fermée* de centre a et de rayon r, la partie :

$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leqslant r\} = \{x \in E \mid d(a, x) \leqslant r\}.$$

On appelle *sphère* de centre a et de rayon r, la partie :

$$S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\} = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}.$$

On appelle *boule unité* la boule ouverte ou fermée de centre 0_E et de rayon 1.

Notations. On verra que la boule fermée $B_f(a, r)$ peut aussi se noter $\overline{B(a, r)}$.

Remarque 3. Si $0 < r < r'$ on a : $B(a, r) \subset B_f(a, r) \subset B(a, r')$.

Remarque 4. Dans le cas particulier de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue) :

$$B(a, r) =]a - r, a + r[\qquad \text{et} \qquad B_f(a, r) = [a - r, a + r].$$

Remarque 5. $B(a, r)$ est l'image de $B(0, r)$ par la translation de vecteur a.
$B_f(a, r)$ est l'image de $B_f(0, r)$ par la translation de vecteur a.

Remarque 6. Si $E = \{0\}$ alors pour tout $r > 0$, $B(0, r) = B_f(0, r) =$ et $S(a, r) =$

Définition 7. Une partie A d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite *convexe* lorsque :

$$\forall (x, y) \in A^2,\ \forall t \in [0, 1],\ t\,x + (1 - t)\,y \in A.$$

⚠ La notion de partie convexe ne nécessite pas de norme.

Exemple 2. Tout sous-espace affine $\mathcal{F}$ de E est convexe.

Proposition 4. Pour tout point a de E et pour tout réel $r > 0$, $B(a, r)$ et $B_f(a, r)$ sont des parties convexes de E.

Démonstration.

$\square$

Exemple 3. Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

I.3. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.

Proposition 5. Si E est un espace préhilbertien réel, i.e. un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, alors on définit une norme sur E en posant :

$$\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Cette norme est appelée *norme euclidienne* ou *norme associée au produit scalaire.*

Démonstration.

$\square$

I.4. Normes usuelles de $\mathbb{K}^n$.

Définition 8. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On définit :

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \qquad \|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Proposition 6. Les applications $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont des normes sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, appelées respectivement *norme infinie*, *norme un* et *norme deux*.

Démonstration. La norme infinie est bien une norme car on reconnaît la norme produit où l'on prend n fois l'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Il est immédiat que la norme un est une norme.

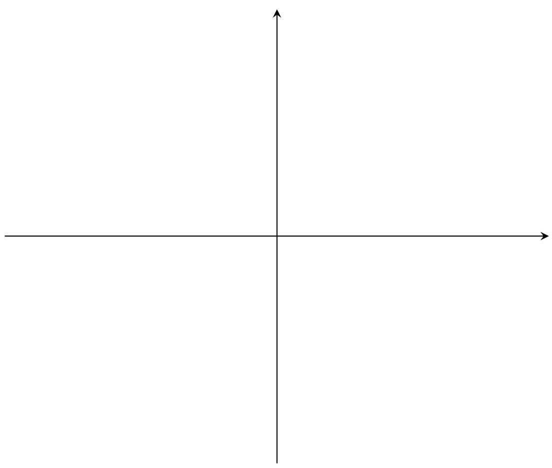
Dans le cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on reconnaît que la norme $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. On admet le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. □

Proposition 7. Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a : $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$.

Démonstration.

□

Représentation des boules unités de $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$:



Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soit u une application linéaire de E dans F. On pose, pour tout $x \in E$, $N(x) = \|u(x)\|$. Montrer que N est une norme sur E si, et seulement si, u est injective.

Remarque importante. L'exercice précédent montre que tout espace vectoriel E de dimension finie peut être muni d'une norme. En effet, en notant $n = \dim(E)$, on sait que E est alors isomorphe à $\mathbb{K}^n$. En notant u un tel isomorphisme et en choisissant une norme $\|.\|$ de $\mathbb{K}^n$, on obtient une norme sur E en posant pour tout $x \in E,\ N(x) = \|u(x)\|$.

Proposition 8. Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$ de cordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. On définit :

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \qquad \|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Les applications $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ainsi définies sont des normes sur E.

Démonstration.

$\square$

Exemple 4. Dans $\mathbb{K}_n[X]$ muni de sa base canonique :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X],\ \|P\|_\infty = \max\{|a_0|, \ldots, |a_n|\}.$$

Exemple 5. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de sa base canonique :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^2}.$$

I.5. PARTIES, SUITES, FONCTIONS BORNÉES.

Définition 9. Une partie A de E est dite *bornée*, s'il existe un réel positif M tel que :

$$\forall x \in A,\ \|x\| \leqslant M.$$

Exercice 2. Montrer qu'une partie A est bornée si, et seulement si, elle est contenue dans une boule.

Définition 10. Une application f d'un ensemble X dans E est dite *bornée*, s'il existe un réel positif M tel que :

$$\forall x \in X,\ \|f(x)\| \leqslant M.$$

En particulier, une suite (u_n) d'éléments de E est dite *bornée*, s'il existe un réel positif M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M.$$

Remarque 8. Une application f est donc bornée si, et seulement si, $f(X)$ est une partie bornée de E.

I.6. NORMES SUR LES ESPACES USUELS DE FONCTIONS.

I.6.a. NORME DE LA CONVERGENCE UNIFORME.

Soit X un ensemble non vide. On note $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions bornées définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 11. On appelle *norme de la convergence uniforme* ou *norme infinie*, la norme définie sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)| = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

On montre facilement que c'est bien une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

On utilisera cette norme principalement dans le cas où X est une intervalle de $\mathbb{R}$ et dans le cas où $X = \mathbb{N}$ i.e. sur l'espace des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$: $\|(u_n)\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.

I.6.b. Normes de la convergence en moyenne, de la convergence en moyenne quadratique.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On note $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 12.

- On appelle *norme de la convergence en moyenne*, la norme définie sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

- On appelle *norme de la convergence en moyenne quadratique*, la norme définie sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}.$$

Dans le cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on reconnaît que la norme $\| \cdot \|_2$ est la norme associée au produit scalaire défini sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

On admet que $\| \cdot \|_2$ est aussi une norme dans la cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Montons que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

Démonstration.

$\square$

Remarque 9. L'ensemble $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$, la norme de la convergence uniforme induit une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. La borne sup est alors atteinte.

II. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé.

II.1. Suite convergente. Suite divergente.

Dans toute cette partie, $(E, \|.\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Définition 13. On dit qu'une suite (a_n) d'éléments de E *converge* vers un élément a de E si la suite réelle $(\|a_n - a\|)$ converge vers 0.

Si un tel élément a existe, on dit que la suite *converge* ou qu'elle est *convergente*.

Dans le cas contraire, i.e. s'il n'existe pas de tel élément a dans E, on dit que la suite *diverge* ou qu'elle est *divergente*.

Remarque 10. Dire qu'une suite (a_n) converge vers a signifie donc :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|a_n - a\| \leqslant \varepsilon,$ ou encore : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ a_n \in B_f(a, \varepsilon).$

Remarque 11. Pour montrer que (a_n) converge vers a il suffit d'exhiber une suite (u_n) de réels positifs qui converge vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|a_n - a\| \leqslant u_n$.

Proposition 9. (Unicité de la limite.)
Si (a_n) est une suite convergente, alors il existe un unique élément a de E tel que (a_n) converge vers a. On note alors :

$$a = \lim_{n \to +\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a.$$

Démonstration.

□

Exemple 6. Soit a et b deux éléments d'un espace vectoriel normé E. Alors la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $a_n = a + \frac{1}{n} b$ converge vers a.
En effet :

⚠ La convergence d'une suite (a_n) vers a dépend du choix de la norme. Voir l'exercice :

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, que l'on peut munir de la norme $\|\cdot\|_1$ ou de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit f_n la suite d'éléments de E définie pour tout $t \in [0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.

1. Montrer que (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme 1.

2. Montrer que (f_n) ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme ∞.

On montrera plus tard que la suite (f_n) est divergente pour la norme ∞.

Proposition 10. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E qui converge vers a, alors la suite $(\|a_n\|)$ converge vers $\|a\|$.

En particulier, toute suite convergente est bornée.

Démonstration.

□

⚠ Une suite (a_n) peut être convergente pour une norme, mais ne même pas être bornée pour une autre. Voir l'exercice :

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Soit f_n la suite d'éléments de E définie pour tout $t \in [0,1]$ par $f_n(t) = \sqrt{n}t^n$.

1. Montrer que (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme 1.

2. Montrer que (f_n) n'est pas bornée pour la norme ∞.

Proposition 11. Soit (a_n) une suite d'éléments de E et (λ_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Si (a_n) converge vers a et (λ_n) converge vers λ, alors la suite $(\lambda_n \cdot a_n)$ converge vers $\lambda \cdot a$.

Démonstration.

□

Proposition 12.

L'ensemble $\mathcal{C}$ des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$, et l'application :
$(a_n) \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ est linéaire.

En particulier, si (a_n) et (b_n) sont deux suites d'éléments de E qui convergent respectivement vers un élément a de E et b de E, alors pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, la suite $(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$ converge vers $\alpha \cdot a + \beta \cdot b$.

Démonstration.

□

II.2. CONVERGENCE D'UNE SUITE À VALEURS DANS UN PRODUIT FINI D'ESPACE VECTORIEL NORMÉ.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Dans cette sous-partie, on notera $E = \prod_{k=1}^{p} E_k$.

On rappelle que l'on a défini sur E une norme appelée la *norme produit* que l'on notera $\|.\|$.

Le but de ce qui suit est de comprendre ce que signifie la convergence d'une suite à valeurs dans un produit cartésien fini d'espace vectoriel normé, muni de la norme produit.

Soit (a_n) une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = (a_n^1, \dots, a_n^p) \in \prod_{k=1}^{p} E_k,$$

i.e. $a_n^k \in E_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Pour tout k, la suite (a_n^k), qui est une suite d'éléments de E_k est appelée la $k^{\text{ème}}$ suite composante.

De même, tout élément ℓ de E sera noté $\ell = (\ell^1, \dots, \ell^p)$ avec $\ell^k \in E_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

Avec cette notation, la norme produit s'écrit :

$$\forall x = (x^1, \dots, x^p) \in \prod_{k=1}^{p} E_k, \ \|x\| =$$

Proposition 13. Une suite (a_n) d'éléments de E converge, pour la norme produit, vers un élément a de E si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite (a_n^k) converge vers a^k dans l'espace vectoriel normé (E_k, N_k).

Démonstration.

□

Remarque importante. On a déjà vu que la norme produit de $\mathbb{K}^p$ est la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ainsi, une suite d'éléments de $\mathbb{K}^p$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ converge si, et seulement si, chacune des p suites composantes convergent (ici ce sont p suites numériques).

II.3. Suites extraites, valeurs d'adhérence.

On définit la notion de suite extraite comme dans le cas des suites numériques :

Définition 14. On appelle *suite extraite* ou *sous-suite* d'une suite (a_n) toute suite de la forme $(a_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Proposition 14. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et de même limite.

Démonstration.

□

Définition 15. On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite (a_n), tout élément a de E pour lequel il existe une suite extraite de (a_n) qui converge vers a.

Remarque 13. Toute suite convergente admet donc une unique valeur d'adhérence : sa limite.
Par contraposée, si une suite admet au moins deux valeurs d'adhérence alors elle diverge.

Exemple 7. La suite réelle $(-1)^n$ diverge puisqu'elle admet -1 et 1 pour valeurs d'adhérence.

⚠ Une suite ayant une unique valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente.
Par exemple :

⚠ Une suite peut n'avoir aucune valeur d'adhérence.
Par exemple :

III. Topologie d'un espace vectoriel normé.

Dans toute cette partie, $(E, \|.\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

III.1. Voisinage d'un point.

Définition 16. Soit a un élément de E. On appelle *voisinage* de a toute partie V de E telle que :

$$\exists r > 0,\ B(a, r) \subset V.$$

Remarque 14. Par transitivité de la relation d'inclusion, si $V \subset W$ et si V est un voisinage de a, alors W est un voisinage de a.

Remarque importante. L'assertion $(\exists r > 0,\ B(a, r) \subset V)$ équivaut à $(\exists r > 0,\ B_f(a, r) \subset V)$.

La notion de voisinage permet de reformuler la définition de convergence d'une suite :

Proposition 15. Une suite (a_n) converge vers a si, et seulement si, pour tout voisinage V de a, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ a_n \in V.$$

Démonstration.

□

III.2. Ouvert.

Définition 17. Une partie U de E est dite *ouverte* si :

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset U.$$

Autrement-dit, U est une partie ouverte signifie qu'elle est un voisinage de chacun de ses points.

Remarque 16. Dans un espace vectoriel normé $E \neq \{0\}$, un ouvert non vide U contient toujours une infinité d'éléments.

En particulier, les singletons (parties de la forme $\{a\}$ avec $a \in E$) ne sont jamais des ouverts d'un espace vectoriel normé.

Proposition 16. Les boules ouvertes sont des parties ouvertes.

Démonstration.

$\square$

Exemples 8.

1. Les intervalles de la forme $]a, b[$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$, sont des ouverts de $\mathbb{R}$ puisque ce sont des boules ouvertes : $]a, b[=$

2. Les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ et $]-\infty, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in]a, +\infty[$. En effet,

Proposition 17.

1. $\varnothing$ et E sont des ouverts de E.

2. Une union quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.

3. Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.

Démonstration.

$\square$

⚠ Une intersection quelconque d'ouverts de E n'est pas toujours un ouvert de E.

Proposition 18. Tout produit (fini) d'ouverts est un ouvert.
Plus précisément, supposons que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, U_k est un ouvert d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (E_k, N_k). Alors, $\prod_{k=1}^{p} U_k$ est un ouvert de $\prod_{k=1}^{p} E_k$ muni de la norme produit, notée $\|\cdot\|$.

Démonstration.

□

Exemple 9. $]0,1[^2$, $]0,1[\times]1,5[$ et $]0,1[\times]2,+\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme produit.

III.3. Fermé.

Définition 18. Une partie F d'un espace vectoriel normé E est dite *fermée* si son complémentaire, $E\setminus F$, est ouvert.

Exercice 5. Montrer que pour tout $a \in E$, $\{a\}$ est une partie fermée.

Proposition 19. Les boules fermées sont des parties fermées.

Démonstration.

□

Exemples 10.

1. Les intervalles de la forme $[a,b]$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$, sont des fermés de $\mathbb{R}$ puisque ce sont des boules fermées : $[a,b] =$

2. Les intervalles de la forme $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in [a,+\infty[$. En effet,

Théorème 1. Caractérisation séquentielle des fermés.
Une partie A de E est fermée si, et seulement si, toute suite d'éléments de A qui converge a sa limite dans A.

Démonstration.

$\square$

Remarque 17. La caractérisation séquentielle des fermés permet de montrer facilement, que pour tout $a \in E$, $\{a\}$ est fermé.

Exercice 6. Montrer que $[0,1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$ ni un fermé.

Proposition 20.

1. $\varnothing$ et E sont des fermés de E.

2. Une union finie de fermés de E est un fermé de E.

3. Une intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E.

Démonstration.

$\square$

⚠ Une union quelconque de fermés de E n'est pas toujours un fermé de E.

Proposition 21. Tout produit (fini) de fermés est un fermé.
Plus précisément, supposons que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, F_k est un fermé d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (E_k, N_k). Alors, $\prod_{k=1}^{p} F_k$ est un fermé de $\prod_{k=1}^{p} E_k$ muni de la norme produit, notée $\|\cdot\|$.

Démonstration.

□

Exemple 11. $[0,1]^2$, $[0,1]\times[1,5]$ et $[0,1]\times[2,+\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme produit.

III.4. Point intérieur.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

Définition 19. On dit qu'un élément x de E est *intérieur* à une partie A de E, si A est un voisinage de x i.e. si :

$$\exists r > 0,\ B(x,r) \subset A.$$

On remarque, en particulier, qu'un point intérieur à A appartient nécessairement à A.

Remarque 18. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. x est un point intérieur à A,

2. $\exists r > 0,\ B_f(x,r) \subset A$,

3. il existe un voisinage V de x tel que : $V \subset A$.

Définition 20. On appelle *intérieur* de A et on note $\mathring{A}$ ou $\mathrm{Int}(A)$, l'ensemble des points intérieurs à A.

Exemple 12. Dans $\mathbb{R}$, l'intérieur de $]0,1]$ et de $[0,1]$ est

Exercice 7. Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que l'intérieur de $B_f(a,r)$ est $B(a,r)$.

Exercice 8. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E (i.e. $F \neq E$). Montrer que $\overset{\circ}{F} = \varnothing$.

Proposition 22. L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A (au sens de l'inclusion).

Démonstration.

$\square$

Corollaire 1. Une partie A de E est ouverte si, et seulement si, $\overset{\circ}{A} = A$.

Corollaire 2. L'intérieur de A est l'union de tous les ouverts contenus dans A.

Démonstration.

□

Exercice 9. Montrer que, pour toutes parties A et B de E : $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

Démonstration.

□

III.5. Point adhérent.

Définition 21. On dit qu'un élément x de E est *adhérent* à une partie A de E, si :

$$\forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \varnothing.$$

Remarque 19. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. x est adhérent à A,

2. $\forall r > 0,\ B_f(x, r) \cap A \neq \varnothing$,

3. pour tout voisinage V de x : $V \cap A \neq \varnothing$.

On remarque, en particulier, que tout point de A est adhérent à A.

Définition 22. On appelle *adhérence* de A et on note $\overline{A}$, ou $\mathrm{Adh}(A)$, l'ensemble des points adhérents à A.

Exemple 13. Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de $]0, 1]$ et de $]0, 1[$ est

Exercice 10. Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que l'adhérence de $B(a, r)$ est $B_f(a, r)$.

Proposition 23. On a : $E \setminus \overline{A} = \mathrm{Int}(E \setminus A)$.
Autrement-dit, tout point de E est soit adhérent à A, soit intérieur à $E \setminus A$.

Démonstration.

□

Proposition 24. L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

Démonstration.

□

Corollaire 3. Une partie A de E est fermée si, et seulement si, $\overline{A} = A$.

Corollaire 4. L'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés contenant A.

Démonstration.

□

Proposition 25. Caractérisation séquentielle des points adhérents.
Un point x de E est adhérent à A si, et seulement si, existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x.

Démonstration.

□

Exercice 11. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'adhérence de F est un sous-espace vectoriel de E.

III.6. Frontière.

Définition 23. On appelle *frontière* de A et on note $\mathrm{Fr}(A)$, l'ensemble des points adhérents à la fois à A et à $E \setminus A$:

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$$

Remarque 20. $\mathrm{Fr}(A)$ est une partie fermée de E car

Remarque 21. On remarque immédiatement que : $\mathrm{Fr}(E \setminus A) = \mathrm{Fr}(A)$.

Proposition 26. On a : $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Démonstration.

□

Remarque 22. La boule ouverte $B(a,r)$ et la boule ouverte $B_f(a,r)$ ont toutes les deux pour frontière le cercle $S(a,r)$.

Exemple 14. Si a et b sont deux réels avec $a < b$ les intervalles $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$ ont tous les 4 pour intérieur $]a,b[$ pour adhérence $[a,b]$ et pour fontière $\{a,b\}$.

Proposition 27. On a : $\mathring{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$ et $E \setminus \overline{A}$ forment une partition de E.

Démonstration.

□

III.7. PARTIE DENSE.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

Définition 24. Une partie D de A est dite *dense* dans A, si $A \subset \overline{D}$ i.e. si tout point de A est adhérent à D.

Remarque 23. Si une partie D de A contient une partie dense dans A, alors D est dense dans A.

D'après la caractérisation séquentielle des points adhérents, on a :

Proposition 28. Une partie D de A est dense dans A si, et seulement si, pour tout élément a de A il existe une suite d'éléments de D qui converge vers a.

Exemples 15.

1. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont des parties denses de $\mathbb{R}$.

2. Les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un unique $a \in \mathbb{R}_+$ soit denses dans $\mathbb{R}$ (voir TD).

Proposition 29. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (quelque soit la norme utilisée).

Démonstration.

□

III.8. Topologie induite : ouvert, fermé et voisinage relatif à une partie.

Jusqu'ici on a défini les notions de voisinage, d'ouvert et de fermé d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Le but de ce qui suit est de définir la notion de voisinage, d'ouvert et de fermé d'une partie quelconque A de E.

Définition 25. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé.

1. Soit $a \in A$. On appelle *voisinage relatif à* A du point a, toute partie de la forme $V \cap A$ où V est un voisinage de a dans E.

2. On appelle *ouvert relatif à* A, toute partie de la forme $U \cap A$ où U est un ouvert de E.

3. On appelle *fermé relatif à* A, toute partie de la forme $F \cap A$ où F est un fermé de E.

Exemples 16.

1. $[0,1[$ est un ouvert relatif de $[0,1]$ car $[0,1[=$

2. $]0,1]$ est un fermé relatif de $\mathbb{R}^*$ car $]0,1] =$

Exercice 12. Soit W une partie de A qui contient un voisinage relatif à A du point a. Montrer que W est un voisinage relatif à A du point a.

Proposition 30. Une partie B de A est un ouvert relatif de A si, et seulement si, B est un voisinage relatif de chacun de ses points.

Démonstration.

□

Proposition 31. Une partie B de A est un fermé relatif de A si, et seulement si, $A \setminus B$ est un ouvert relatif de A.

Démonstration.

□

IV. Comparaison de normes.

Proposition 32. Soit $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes quelconques définies sur un même espace vectoriel E. Toute suite qui converge au sens de $\|\cdot\|$ converge aussi au sens de $\|\cdot\|'$ si, et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|' \leqslant \alpha\|x\|$.

Démonstration.

□

Remarque 24. Pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on a :

$\|f\|_1 =$

Donc, toute suite d'éléments de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ qui converge pour la norme ∞ converge pour la norme 1, mais on a déjà vu que la réciproque est fausse.

Définition 26. Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ définies sur un même espace vectoriel E sont dites *équivalentes* s'il existe deux réels strictement positifs α et β tel que :

$$\forall x \in E,\ \alpha\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \beta\|x\|.$$

Remarque 25. Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

Remarque 26. Si deux normes sont équivalentes, toute suite bornée pour l'une est bornée pour l'autre.

Corollaire 5. Deux normes sont équivalentes si, et seulement si toute suite convergente pour l'une est convergente pour l'autre.

Remarque 27. Ce corollaire dit que si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux normes équivalentes, alors les suites convergentes de l'espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ sont les mêmes que celles de $(E,\|\cdot\|')$. Et d'après la démonstration de la proposition précédente, les limites sont aussi les mêmes.

Méthode. Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, il suffira d'exhiber une suite qui converge pour l'une des normes mais qui diverge pour l'autre.

Exemple 17. Dans l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, la norme 1 et la norme ∞ ne sont pas équivalentes puisque nous avons déjà exhiber une suite qui converge pour la norme 1 mais pas pour la norme ∞.

Proposition 33. Les normes $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ de $\mathbb{K}^n$, sont équivalentes.
Plus précisément on a pour tout $x \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty, \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

Démonstration.

□

Lemme. Boules et normes équivalentes.
Soit $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes quelconques définies sur un même espace vectoriel E.
Pour $a \in E$ et $r > 0$, nous noterons $B_f(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leqslant r\}$ et $B'_f(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\|' \leqslant r\}$.
Soit deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
1. Pour tout $x \in E$, $\alpha\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \beta\|x\|$.
2. Pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, $B'_f(a, \alpha r) \subset B_f(a,r) \subset B'_f(a, \beta r)$.
3. $B'_f(0,\alpha) \subset B_f(0,1) \subset B'_f(0,\beta)$.

Démonstration.

□

Proposition 34.
Soit $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes quelconques définies sur un même espace vectoriel E.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :
1. Ces normes sont équivalentes.
2. Ces normes définissent les mêmes parties bornées.
3. Ces normes définissent les mêmes voisinages.
4. Ces normes définissent les mêmes parties ouvertes.
5. Ces normes définissent les mêmes parties fermées.

Démonstration.

$\square$

Remarque 28. On en déduit aussi que l'intérieur, l'adhérence et le frontière d'une partie sont invariantes par passage à une norme équivalente.