

– Programme de colle n° 4 : du 6 au 10/10 –

Cette semaine, les questions de cours portent sur le chapitre 5 : Structure d'anneaux.  
Les exercices portent uniquement sur le chapitre 4 : Structure de groupes.

**CHAPITRE 5 - STRUCTURE D'ANNEAUX.**  
**COURS UNIQUEMENT**

**I. RAPPELS SUR LES ANNEAUX.**

**I.1.** Notion d'intégrité.

**I.2.** Notion de sous-anneau.

**I.3.** Morphisme d'anneaux.

**I.4.** Groupe des inversibles d'un anneau.  
On note  $A^\times$  le groupe des inversibles d'un anneau  $A$ .

**I.5.** Corps.

**II. COMPLÉMENTS SUR LES ANNEAUX.**

**II.1.** Produit fini d'anneaux.

**II.2.** Idéal d'un anneau commutatif.

Bien connaître la définition d'un idéal.

**II.3.** Idéal engendré par un élément.

**II.4.** Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.

Lien entre divisibilité et inclusion des idéaux principaux :  $a \mid b \Leftrightarrow bA \subset aA$ .

**II.5.** Idéaux de l'anneau  $(\mathbb{Z}, +, \times)$ .

$\mathbb{Z}$  est un anneau principal.

Bien savoir énoncer la définition du PGCD et du PPCM de  $n \geq 2$  entiers relatifs en utilisant les idéaux de  $(\mathbb{Z}, +, \times)$ .

**III. ANNEAUX  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ .**

Caractérisation des éléments inversibles de l'anneau  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ . 

$(n \text{ est premier}) \Leftrightarrow ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times) \text{ est un corps}) \Leftrightarrow ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times) \text{ est intègre})$ . 

Bien savoir énoncer les deux versions du théorème chinois : en termes d'isomorphisme d'anneaux et en termes de système de congruences. 

#### IV. INDICATRICE D'EULER $\varphi$ .

Bien connaître la définition et les différentes propriétés de l'indicatrice d'Euler.

Pour tout  $n \geq 2$  on a :  $\varphi(n) \leq n - 1$  avec égalité si, et seulement si,  $n$  est premier. 

En particulier : si  $n$  et  $m$  sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors  $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ . 

Théorème d'Euler et petit théorème de Fermat. 

#### V. ANNEAUX $\mathbb{K}[X]$ .

**V.1.** Rappels sur les polynômes.

**V.2.** Idéaux de  $\mathbb{K}[X]$ .

$\mathbb{K}[X]$  est un anneau principal. Notion de générateur normalisé d'un idéal. 

**V.3.** PGCD et le PPCM.

Bien savoir énoncer la définition du PGCD et du PPCM de  $n \geq 2$  polynômes en utilisant les idéaux de  $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ .  
Par définition, le PGCD et le PPCM sont normalisés (i.e. unitaires ou nuls).

**V.4.** Polynômes irréductibles.

Décomposition en produit de polynômes irréductibles.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Notion de polynôme scindé.

Bien connaître la définition d'un polynôme irréductible.

Polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  et de  $\mathbb{R}[X]$ . 

#### VI. ALGÈBRES.

Notion de  $\mathbb{K}$ -algèbre, de sous-algèbre, de morphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres.