– TD 5 : Structure d'anneaux –

Exercice 1. Soit $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux a au moins deux éléments, et soit f un morphisme d'anneaux de A dans B .

1. Montrer que l'image réciproque d'un sous-anneau de B par f est un sous-anneau de A.

2. Montrer que l'image directe d'un sous-anneau de A par f est un sous-anneau de B.

3. Montrer que l'image réciproque d'un idéal de B par f est un idéal de A.

4. Montrer que l'image directe d'un idéal de A par f est un idéal du sous-anneau $f(A)$.

Exercice 2. Radical d'un idéal.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et I un idéal de A. On appelle radical de I, et on note, $\sqrt{I}$, l'ensemble : $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.

2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

3. Soit I et J deux idéaux de A.

a. Montrer que si $I \subset J$, alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$.

b. En déduire que : $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$.

4. Dans l'anneau $\mathbb{Z}$, déterminer $\sqrt{1800\mathbb{Z}}$.

Exercice 3. Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de n pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seul le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces. Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 4. Le polynôme $P = X^3 + 5X + 2$ est-il irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 5. Le polynôme $P = X^3 + \overline{2}X + \overline{3}$ est-il irréductible sur $\mathbb{F}_5[X]$?

Exercice 6. La fonction indicatrice d'Euler.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dénombrant les éléments d'ordre d dans le groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$, montrer que :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d),$$

où d parcourt les diviseurs positifs de n.

2. Déduire de cette égalité une fonction python nommée `phi` prenant pour paramètre un élément $n \in \mathbb{N}^*$ et, qui à l'aide de cette égalité, calcule et retourne la valeur de $\varphi(n)$.

Exercice 7. Déterminer les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Le groupe $((\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times, \times)$ est-il cyclique ?

Exercice 8. Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre et fini. Montrer que $(A, +, \times)$ est un corps.

Exercice 9. Groupe des inversibles d'un corps fini.
On considère un corps fini $\mathbb{F}$. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe $(\mathbb{F}^{\times}, \times)$ des inversibles de $\mathbb{F}$ est un groupe cyclique.

1. Soit $x \in \mathbb{F}^{\times}$ un élément d'ordre $d \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{F}^{\times}$ vérifiant $y^d = 1$. Montrer que y appartient au groupe engendré par x.

Indication : on pourra considérer le polynôme $X^d - 1$ et admettre qu'il admet au plus d racines distinctes.

2. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note $N(d)$ le nombre d'éléments d'ordre d dans $\mathbb{F}^{\times}$. Montrer que $N(d) \leqslant \varphi(d)$.

3. Conclure.

Exercice 10. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif contenant au moins deux éléments, et I un idéal.

1. Montrer que si I contient un élément inversible de A, alors $1_A \in I$, puis que $I = A$.

2. Montrer que $(A, +, \times)$ est un corps si, et seulement si, ses seuls idéaux sont $\{0_A\}$ et A.

3. Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et $(B, +, \times)$ un anneau commutatif contenant au moins deux éléments. Montrer que tout morphisme d'anneau de $\mathbb{K}$ dans B est injectif.

4. On suppose A intègre et qu'il n'admet qu'un nombre fini d'idéaux. Démontrer que A est un corps.

Exercice 11. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout réel x, $P(x) \geqslant 0$.
Le but de cet exercice est de prouver l'existence d'un couple $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

1. Montrer que l'ordre de multiplicité de chaque racine réelle de P est un entier pair.

2. Montrer que l'ensemble $E = \{A^2 + B^2 \mid (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2\}$ est stable par produit. Conclure.

Exercice 12. Donner l'ensemble G des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.
Expliciter un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, \times)$.

Exercice 13. Caractéristique d'un anneau.
Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

1. Déterminer l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A. On le notera φ.

2. Justifier l'existence d'un unique entier n tel que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = n\mathbb{Z}$.

Cet entier n est appelé *la caractéristique de l'anneau A*.

3. Justifier que la caractéristique d'un corps $\mathbb{K}$ est nulle ou égale à un nombre premier.

4. Soit $\mathbb{K}$ un corps. A-t-on équivalence entre $\mathbb{K}$ est infini, et $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle ?

Exercice 14. On note $\mathbb{K}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+4y \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $J \in \mathbb{K}$ telle que $J^2 = -\mathrm{I}_2$.

2. Montrer que $\mathbb{K}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

Exercice 15. Anneau $\mathbb{Z}[X]$.

1. Dans $\mathbb{Z}[X]$, on considère l'idéal $I = (2, X)$ i.e. l'idéal engendré par 2 et X. Montrer que I n'est pas un idéal principal.

2. Soit A un anneau commutatif. Montrer que l'anneau $A[X]$ est principal si, et seulement si, A est un corps.