– Programme de colle n° 6 : du 03/11 au 07/11 –

Cette semaine, les questions de cours portent sur tout ce qui suit.
Les exercices portent sur le chapitre 6 : Topologie Partie I (uniquement).

Chapitre 6 - Topologie des espaces vectoriels normés (Partie I)

I. Normes et espaces vectoriels normés.

II. Topologie d'un espace vectoriel normé.

II.1. Voisinage d'un point.

II.2. Ouvert.

II.3. Fermé.

II.4. Point intérieur.

L'intérieur de $B_f(a, r)$ est $B(a, r)$.
L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A (au sens de l'inclusion).
L'intérieur de A est l'union de tous les ouverts contenus dans A.

II.5. Point adhérent.

L'adhérence de $B(a, r)$ est $B_f(a, r)$.
L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant dans A (au sens de l'inclusion).
L'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés contenant A.
Caractérisation séquentielle d'un point adhérent.

II.6. Frontière.

$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

II.7. Partie dense.

Bien connaître la définition de partie dense.
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (quelque soit la norme utilisée). ✎

II.8. Topologie induite sur une partie A de E.

⚠ Bien connaître la définition d'un ouvert, d'un fermé et d'un voisinage relatif à une partie.

III. COMPARAISON DE NORMES.

Toute suite qui converge au sens de $\|\cdot\|$ converge aussi au sens de $\|\cdot\|'$ si, et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|' \leqslant \alpha\|x\|$. ✎

Notion de normes équivalentes.

Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$: $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$, et $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

Soit $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes quelconques définies sur un même espace vectoriel E.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Ces normes sont équivalentes.

2. Ces normes définissent les mêmes parties bornées.

3. Ces normes définissent les mêmes voisinages.

4. Ces normes définissent les mêmes parties ouvertes.

5. Ces normes définissent les mêmes parties fermées.

6. Ces normes définissent les mêmes suites convergentes.

⚠ Savoir démontrer que deux normes sont équivalentes si, et seulement si, elles définissent, pour tout point de E, les mêmes voisinages. ✎

CHAPITRE 7 - TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS (PARTIE II).

⚠ COURS UNIQUEMENT - CE CHAPITRE N'EST PAS TERMINÉ.

I. LIMITE D'UNE APPLICATION.

I.1. La notion de limite.

Caractérisation séquentielle de la limite. ✎

Proposition Soit a un point adhérent à A et $b \in F$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f tend vers un élément b de F en a.

2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in B(a,\eta) \cap A,\ f(x) \in B(b,\varepsilon)$.

3. Pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage U de a tel que : $\forall x \in U \cap A,\ f(x) \in V$.

4. Pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage U de a tel que : $f(U \cap A) \subset V$.

5. Pour tout voisinage V de b, $f^{-1}(V)$ est un voisinage relatif à A du point a.

I.2. Limite d'une composée. ✎

I.3. Limite d'une fonction à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

II. Continuité.

II.1. Continuité ponctuelle.

Proposition Soit a un point de A. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en a.

2. Pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage U de a tel que : $f(U \cap A) \subset V$.

3. Pour tout voisinage V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage relatif à A du point a.

II.2. Continuité globale.

Proposition ✎

Soit f une application de A dans F. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur A,

2. Pour tout ouvert Y de F, $f^{-1}(Y)$ est un ouvert relatif de A,

3. Pour tout fermé Y de F, $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif de A.

III. Applications linéaires continues.

III.1. Critère de continuité d'une application linéaire.

III.2. Norme subordonnée (ou norme d'opérateur).

Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on a : $|||u||| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. ✎

On en déduit que pour tout $x \in E$: $\|u(x)\| \leqslant |||u||| \times \|x\|$.

⚠ Savoir calculer la norme subordonnée d'une application linéaire continue. Savoir expliquer la méthode.