– TD 6 : Topologie des espaces vectoriels normés (Partie I) –

Exercice 1. Soit a un élément d'un espace vectoriel normé E, et soit $r > 0$. Soit A une partie de E telle que : $B(a,r) \subset A \subset B_f(a,r)$. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de A.

Exercice 2. Montrer que l'application $N_1 : P \mapsto \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que l'application $N_2 : P \mapsto \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t) - P'(t)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable, c'est-à-dire telles que la série de terme général $|u_n|^2$ converge. Pour tout $u \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ on pose :

$$\|u\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{1/2}.$$

Montrer que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $\|.\|$ est un norme sur cet espace.

Exercice 4. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\|A\| = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|.$$

Montrer (efficacement) que $\|.\|$ est un norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis prouver qu'elle vérifie :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

⚠ Une norme vérifiant cette inégalité, est qualifiée de *norme d'algèbre* ou *norme sous-multiplicative.*

Exercice 5. Norme de Frobenius sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^2\right)^{1/2}.$$

1. Prouver que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

2. On suppose maintenant $n = p$. Montrer que $\|.\|_2$ est une norme sous-multiplicative.

Exercice 6. On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|.\|$.

1. Soit (A_n) et (B_n) deux suites d'éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui convergent respectivement vers A et B. Montrer que la suite $(A_n \times B_n)$ converge vers $A \times B$.

2. À quelle condition sur $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ existe-t-il $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$?

Exercice 7. On munit chacun des espaces $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ de la norme infinie notée $\|.\|_\infty$. On considère deux suites (A_n) et (B_n) à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On suppose que (A_n) et (B_n) convergent respectivement vers A et B. Montrer que la suite $(A_n \times B_n)$ converge vers $A \times B$.

⚠ On verra que ce résultat est vrai quels que soient les normes utilisées.

Exercice 8. Déterminer la frontière de $\mathbb{Q}$.

Exercice 9. Soit A et B deux parties d'un evn. Montrer que $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \mathrm{Int}(A\cap B)$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \mathrm{Int}(A\cup B)$. Donner un exemple où cette deuxième inclusion est stricte.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée dont toutes les suites extraites convergentes ont la même limite. Démontrer que la suite (u_n) converge. *Indication : on pourra se rappeler du théorème de Bolzano-Weierstrass.*

Exercice 11. Soit (a_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E, et qui converge vers un élément a de E. Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble :

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

est un fermé de E. Soit $b \in E \setminus A$.

1. Prouver l'existence d'un réel $r > 0$ tel que $B(a, r)$ et $B(b, r)$ soient disjointes.

2. En déduire l'existence d'un réel $s > 0$ tel que $B(b, s) \subset E \setminus A$. Conclure.

Exercice 12. Soit F une partie fermée non vide d'un evn E et $x \in E$. Montrer que : $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

Exercice 13. Montrer qu'un hyperplan H d'un espace vectoriel normé E est soit fermé soit dense.

Exercice 14. Soit N définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $N\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$

1. Montrer que N est une norme.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(a)$. Pour quelles valeur de a, l'application ϕ est-elle continue pour la norme N ?

Exercice 15. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et E^+ la partie de E constituée des fonctions positives qui ne s'annulent qu'au plus un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction f de E on pose :

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\|.\|_\varphi$ définit une norme sur E.

2. Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux fonctions strictement positives de E^+, alors les normes $\|.\|_{\varphi_1}$ et $\|.\|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.

3. On définit maintenant les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto t$ et $\varphi_2 : t \mapsto t^2$. Les normes $\|.\|_{\varphi_1}$ et $\|.\|_{\varphi_2}$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 16. Soit E l'espace vectoriel des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées et vérifiant $u_0 = 0$. On pose :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad \|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|.$$

On pourra admettre que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

2. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout $u \in E$, $\|u\| \leqslant k\|u\|_\infty$. Donner le plus petit k possible.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \leqslant p \\ p & \text{sinon.} \end{cases}$$

À l'aide de cette suite, montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 17. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose :

$$\|P\|_1 = \sum_{k\geqslant 0} |P^{(k)}(0)| \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $P_n = \frac{1}{n}X^n$.

À l'aide de cette suite, montrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.