– Programme de colle n° 7 : du 10 au 14/11 –

Cette semaine, les questions de cours portent sur tout ce qui suit. Les exercices portent sur les chapitre 6 et 7 : Topologie (Partie I & II), mais on ne pose **pas d'exercice sur la compacité, ni sur la connexité par arc**.

Chapitre 7 - Topologie (Partie II).

I. Limite d'une application.

I.1. La notion de limite.

I.2. Limite d'une composée.

I.3. Limite d'une fonction à valeurs dans un produit fini d'espace vectoriel normé.

II. Continuité.

II.1. Continuité ponctuelle.

Proposition Soit a un point de A. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
1. f est continue en a.
2. Pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage U de a tel que : $f(U \cap A) \subset V$.
3. Pour tout voisinage V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage relatif à A du point a.

II.2. Continuité globale.

Proposition
Soit f une application de A dans F. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
1. f est continue sur A,
2. Pour tout ouvert Y de F, $f^{-1}(Y)$ est un ouvert relatif de A,
3. Pour tout fermé Y de F, $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif de A.

III. Applications linéaires continues.

III.1. Critère de continuité d'une application linéaire.

III.2. Norme subordonnée (ou norme d'opérateur).

Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on a : $|||u||| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x \neq 0_E} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.
On en déduit que pour tout $x \in E$: $\|u(x)\| \leqslant |||u||| \times \|x\|$.
⚠ Savoir calculer la norme subordonnée d'une application linéaire continue.
La norme subordonnée est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, et elle est sous-multiplicative.
Critère de continuité d'une application multilinéaire.

III.3. Adaptation aux matrices.

IV. Parties compactes d'un espace vectoriel normé.

Une partie compacte est fermée et bornée. Mais la réciproque est fausse. ✎

Tout fermé contenue dans une partie compacte est compact.

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Tout produit cartésien de parties compactes est compact pour la norme produit.

V. Applications continues sur une partie compacte.

L'image par une application continue d'une partie compacte est compacte. ✎

Théorème des bornes atteintes (sur un compact non vide).

VI. Espaces vectoriels normés de dimension finie.

VI.1. Équivalence des normes en dimension finie.

Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. ✎

VI.2. Utilisation des coordonnées dans une base.

⚠ Savoir correctement expliquer la caractérisation de la convergence d'une suite ou de la limite d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie en utilisant les composantes dans une base.

VI.3. Application aux séries vectorielles.

Séries absolument convergentes en dimension finie + définition de l'exponentielle d'une matrice carrée. ✎

VI.4. Continuité des applications linéaires.

Toutes les applications linéaires définies sur un espace vectoriel de dimension finie sont continues. ✎

En dimension finie, une partie est compacte si, et seulement si, elle est fermée bornée.

Une suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie converge si, et seulement si, elle a une unique valeur d'adhérence.

Un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

VI.5. Applications polynomiales.

Continuité des applications polynomiales défines sur un espace vectoriel normé de dimension finie et continuité de l'application déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ✎

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte et dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ✎

VII. Connexité par arcs.

Notion d'arc ou de chemin continu. Composante connexes par arc d'une partie.

Une partie est connexe par arcs si elle n'a qu'une seule composante connexe par arcs.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs (on traitera ce point lundi). ✎