

– TD 7 : Topologie des espaces vectoriels normés (Partie II) –

**Exercice 1.** Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $A$  et que  $(A_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $B$ . Montrer que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.

**Exercice 2.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 si, et seulement si, la série de terme général  $A^k$  converge.

**Exercice 3.** Montrer qu'un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel normé  $E$  est continu si, et seulement si, la partie  $\{x \in E \mid \|u(x)\| = 1\}$  est un fermé de  $E$ .

**Exercice 4.** Soit  $f : A \rightarrow F$  une application continue. Montrer que si  $D$  est une partie dense de  $A$  alors,  $f(D)$  est une partie dense de  $f(A)$ .

**Exercice 5.** Soit  $H$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  non réduit à  $\{0\}$ .

1. Justifier l'existence de :  $a = \inf H \cap \mathbb{R}_+^*$ .
2. On suppose  $a > 0$ . Montrer que  $a \in H$  puis que  $H = a\mathbb{Z}$ .
3. On suppose  $a = 0$ . Établir que  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
4. Montrer que l'ensemble  $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

**Exercice 6.** On considère  $E = \mathcal{C}([0, 1])$  que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

On considère  $F = \mathcal{C}^1([0, 1])$  que l'on munit de la norme :  $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ .

On définit l'application linéaire  $T$  de  $E$  dans  $F$  par :  $\forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ .

Montrer que  $T$  est continue et déterminer sa norme subordonnée.

**Exercice 7.** On considère  $E$  l'espace vectoriel des suites bornées, que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Pour toute suite bornée  $(u_n)_n$  on définit la suite  $(v_n)_n$  par :  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .

On définit l'endomorphisme  $T$  de  $E$  par  $T(u) = v$ .

Montrer que  $T$  est continue et déterminer sa norme subordonnée.

**Exercice 8.** On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$ , que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On définit la forme linéaire  $\varphi$  de  $\mathbb{R}[X]$  par  $\varphi(P) = P(\alpha)$ .

1. Déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour que  $\varphi$  soit continue.
2. Dans ce cas, déterminer sa norme subordonnée.

**Exercice 9.** On considère  $D$  l'opérateur de dérivation des polynômes i.e. l'endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  défini par  $D(P) = P'$ . Étudier sa continuité pour chacune des normes suivantes et donner sa norme d'opérateur le cas échéant :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x \in [0, 1]} |P(x)|.$$

**Exercice 10.** On note :  $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\}$ .  
Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  est une partie compacte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 11.** On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme produit. On note :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que  $A$  et  $B$  sont deux parties fermées de  $\mathbb{R}^2$ .
2. On note :  $A+B = \{a+b \in \mathbb{R}^2 \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$ . Montrer que  $A+B$  n'est pas une partie fermée de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 12.** Soit  $F$  une partie fermée non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie  $E$ . Montrer que, pour tout  $x \in E$ , la distance de  $x$  à  $F$  est atteinte en un certain élément  $y_0 \in F$ .

**Exercice 13.** On munit  $\mathbb{K}^p$  et  $\mathbb{K}^n$  de la norme  $\infty$ . Montrer que pour tout  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  on a :

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq p} |a_{i,j}|.$$

**Exercice 14.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé et soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de compacts de  $E$ . Montrer que leur intersection est un compact de  $E$ . Leur union est-elle nécessairement compacte ?

**Exercice 15.** Soit  $E$  un espace normé de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que les espaces  $\text{Ker}(u - \text{Id})$  et  $\text{Im}(u - \text{Id})$  sont supplémentaires.

1. Soit  $x \in \text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id})$ . Montrer qu'il existe  $a \in E$  tel que pour tout entier  $n$ ,  $u^n(a) - a = nx$ .
2. Conclure.

**Exercice 16.** Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $(u_{n+1} - u_n)$  converge vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  est un intervalle.

**Exercice 17.** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $E$  vérifiant :  $\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ .

Soit  $K$  une partie compacte de  $E$  telle que  $f(K) \subset K$ .

Pour  $x \in \mathbb{K}$ , on considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = x$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Montrer que  $x$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ . En déduire que  $f(K) = K$ .

**Exercice 18.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{P}$  des projecteurs de  $E$  est une partie fermée de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Exercice 19.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On se place dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $T$  une matrice triangulaire inversible.

1. Montrer que  $T$  peut être reliée à  $I_n$  par un chemin à valeurs dans  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ .
2. En déduire que  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

**Exercice 20.** On souhaite montrer que les seules parties ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé  $E$  sont  $\emptyset$  et  $E$ . On raisonne par l'absurde et on suppose l'existence d'une troisième partie  $A$  ouverte et fermée.

1. Montrer que l'application indicatrice de  $A$ , notée  $\mathbb{1}_A$ , est continue en tout point de  $E$ .
2. Conclure.