

– TD 8 : Révisions d'algèbre linéaire –

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel et u en endomorphisme de E admettant $X^2 + 3X + 2$ pour polynôme annulateur i.e. vérifiant : $u^2 + 3u + 2\text{Id}_E = 0$.

1. On pose $v = u + 2\text{Id}_E$, calculer v^2 .
2. En déduire l'existence de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E tels que les restrictions $u|_F$ et $u|_G$ sont des homothéties.

Exercice 2. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et G un sous-espace vectoriel de E . On définit l'ensemble $\mathcal{H}$ par :

$$\mathcal{H} = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subset \text{Ker } u\}.$$

Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et calculer sa dimension.

Exercice 3. On sait que la valeur de la dimension d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E dépend du choix du corps $\mathbb{K}$. Le but de cet exercice est de montrer que le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

On considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de tous les nombres premiers dans l'ordre croissant : $p_1 = 2, p_2 = 3 \dots$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(\ln(p_1), \dots, \ln(p_n))$ est libre.

Exercice 4. Soit l'application :

$$\begin{array}{ccc} \Delta & : & \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ & & P \mapsto P(X+1) - P. \end{array}$$

$\triangleleft$ $P(X+1)$ désigne la composée de P par $X+1$, que l'on pourrait aussi noter $P \circ (X+1)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\text{Ker } (\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire $\text{Im}(\Delta)$.
4. Soit F l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$.
 - a. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
 - b. Montrer que : $F \oplus \text{Ker } (\Delta) = \mathbb{R}[X]$.
 - c. Montrer que $\Delta|_F$ est un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}[X]$.
5. a. Montrer qu'il existe une unique suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $N_0 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} N_n(0) &= 0 \\ \Delta(N_n) &= N_{n-1}. \end{cases}$$

- b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, N_n = \frac{X(X-1) \cdots (X-n+1)}{n!}$.
- c. Montrer que $(N_0, N_1, \dots, N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les coordonnées de Q dans la base $(N_0, N_1, \dots, N_n)$ sont :

$$(Q(0), \Delta(Q)(0), \Delta^2(Q)(0), \dots, \Delta^n(Q)(0)).$$

Exercice 5. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et soit $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ les polynômes de Lagrange associés. Déterminer une expression simple du polynôme $P = \sum_{1 \leq j \leq n} L_j$.

Exercice 6. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et soit $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ les polynômes de Lagrange associés.

1. Montrer que $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
2. Déterminer sa base duale.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit f et g deux formes linéaires non-nulles définies sur E .

1. Démontrer qu'il existe $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$.
2. On suppose qu'il existe p formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ telles que :

$$\forall x \in E, (f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

Montrer que $\dim(E) \leq p$.

Exercice 8. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à n . Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ de noyau F et d'image G .

Exercice 9. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est stable par u si :

$$\forall x \in F, u(x) \in F.$$

Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les endomorphismes :

$$u_\sigma : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $x \in E$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in E^*$. Que peut-on dire de x ?
2. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* . Montrer qu'il existe une unique base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ soit la base duale de $\mathcal{B}$.