– TD 9 : Algèbre linéaire et matrices (révisions) –

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $x \in E$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in E^*$. Que peut-on dire de x ?

2. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une unique base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ soit la base duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 2. Calculer sous forme factorisée :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. Déterminant de la matrice compagnon.

Soit $n \geqslant 2$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - x \end{vmatrix}.$$

Exercice 4. Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que f^2 soit l'endomorphisme nul.

1. Déterminer la dimension du noyau de f.

2. En déduire l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Nous considérerons tout d'abord une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Nous appellerons *matrice extraite* de A, toute matrice B obtenue à partir de A, en lui supprimant i lignes et j colonnes, où $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $j \in [\![0, p-1]\!]$.

1. Montrer que si $\operatorname{rg} A = r$, alors toute matrice B extraite de A est de rang au plus r.

2. Montrer que $\operatorname{rg} A \leqslant r$ si, et seulement si, toute matrice carrée B de taille $k > r$ extraite de A est non inversible.

On pose désormais $n = p$, et on note F_r l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang supérieur ou égal à r.

3. Montrer que F_r est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est son adhérence ?

Exercice 6. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer leur trace, leur déterminant et leur rang.

2. Montrer que ces deux matrices sont équivalentes.

3. Montrer que les matrices $A - \mathrm{I}_3$ et $B - \mathrm{I}_3$ ne sont pas semblables.

4. En déduire que A et B ne sont pas semblables.

Exercice 7. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Calculer le déterminant de A_λ sous forme factorisée, et donner le rang de A_λ. Pour quelles valeurs de λ, A_λ n'est pas inversible ?

Exercice 8. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la dimension des deux sous-espaces vectoriels :

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{AM \mid M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\}.$$