– Programme de colle n° 10 : du 01 au 05/12 –

Les questions de cours et les démonstrations portent sur ce qui suit.
On posera des exercices d'algèbre linéaire de mpsi + des exemples simples de calcul de polynôme caractéristique, recherche de valeurs propres, de multiplicité algébrique, et recherche de sous-espaces propres par résolution de l'équation $u(x) = \lambda x$ d'inconnue $x \in E$.

Chapitre 10 - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées.

⚠ Ce chapitre n'est pas terminé.

I. Rappels sur les racines d'un polynôme.

L'ordre de multiplicité d'une racine α est le plus grand entier r tel que $(X-\alpha)^r \mid P$.
⚠ Ne pas confondre : « α est une racine d'ordre r » et « α est une racine d'ordre au moins r » .
α est une racine d'ordre r de P, si, et seulement si,

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

Définition d'un polynôme scindé, scindé à racines simples.
⚠ Connaître la formule de Taylor des polynômes (voir cours de mpsi).

II. Sous-espaces vectoriels stables.

Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable* par un endomorphisme u de E lorsque $u(F) \subset F$. Notion d'endomorphisme induit. Il est noté u_F.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $r \in [\![1, n-1]\!]$. Si :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \text{avec } A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}).$$

En posant $F = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$ on a : F est stable par u si, et seulement si, $C = 0$. ✎
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D$.

III. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

III.1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme.

⚠ Bien connaître les définitions vecteurs propres, valeurs propres et sous-espaces propres. Par définition, un vecteur propre est toujours non nul.
Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent (i.e. $u \circ v = v \circ u$), alors tout sous-espace propre de u est stable par v. ✎
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des scalaires deux à deux distincts, alors les sous-espaces $\text{Ker}(u - \lambda_1 \text{Id}_E), \ldots, \text{Ker}(u - \lambda_p \text{Id}_E)$ sont en somme directe. ✎
Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

III.2. Cas des endomorphismes d'un espace de dimension finie.

Lorsque E est de dimension finie, on appelle *spectre* de u, et l'on note $\operatorname{sp} u$, l'ensemble des valeurs propres de u.
Si E est de dimension finie égale à n, alors le spectre d'un endomorphisme est fini, et de cardinal au plus n.
⚠ En dimension infinie, un endomorphisme peut avoir une infinité de valeurs propres. Connaître un exemple.

III.3. Vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice carrée.

III.4. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

Par définition : $\chi_A = \det(X\mathrm{I}_n - A)$ (vu comme déterminant d'une matrice à coefficients dans le corps $\mathbb{K}(X)$).
Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme unitaire de degré n. Plus précisément, il est de la forme :

$$\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A).$$ ✎

Le spectre de A est égal à l'ensemble des racines de χ_A.

III.5. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u_F induit par u sur un sous-espace vectoriel stable F, divise le polynôme caractéristique de u (en sachant calculer le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs). ✎
Pour toute valeur propre λ de u, on a : $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda$. ✎

IV. ENDOMORPHISMES ET MATRICES CARRÉES DIAGONALISABLES.

E est supposé de dimension finie.

IV.1. Définitions de la notion de diagonalisation.

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit *diagonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice carrée est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale.

Soit u un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base de E. La matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonalisable si, et seulement si, u est diagonalisable. ✎

IV.2. Conditions de diagonalisation.

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \bigoplus_{1\leqslant k\leqslant p} E_{\lambda_k}(u) = E \iff \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \dim E_{\lambda_k}(u) = \dim E.$$