– TD 10 –
Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (1)

Exercice 1. Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$. On suppose que $CD = DC$.

1. En supposant D inversible, montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

2. Généraliser l'égalité précédente, au cas où D n'est plus supposée inversible.

Exercice 2. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique, et son spectre.

2. Déterminer ses éléments propres (valeurs propres et sous-espaces propres associés).

3. Prouver que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la diagonaliser en donnant une matrice de passage.

Exercice 3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de la matrice : $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 4. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f de décalage de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: $(u_n) \mapsto (u_{n+1})$.

Exercice 5. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par l'endomorphisme D de dérivation.

Exercice 6. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer qu'elle est triagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la trigonaliser en donnant une matrice de passage

Exercice 7. Justifier que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

Exercice 8. On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de chacune de ces deux matrices.
2. En déduire leur trace, leur déterminant, leur rang.
3. Montrer qu'elles sont équivalentes mais pas semblables.

Exercice 9. Étudier la réduction dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.
1. On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

b. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Sont-elles semblables ?

2. On considère maintenant deux autres matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons montrer, par deux méthodes différentes, que ces deux matrices sont semblables.

a. Première méthode. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Sans aucun calcul, déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $B = M_{\mathcal{B}'}(u)$.

b. Deuxième méthode. Montrer que ces deux matrices ont le polynôme caractéristique que l'on déterminera. Par une étude de fonctions, prouver que leur polynôme caractéristique admet 3 racines réelles distinctes, que l'on ne cherchera pas à calculer. Conclure.

Exercice 11. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ deux matrices qui commutent. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes.
1. Montrer que A est diagonalisable et que toute matrice de passage qui diagonalise A, diagonalise B.
2. Toute matrice de passage qui diagonalise B, diagonalise-t-elle A ?
3. Résoudre l'équation $M^3 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
1. Diagonaliser la matrice A.
2. Résoudre l'équation $M^2 + M = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Préciser le nombre de solutions distinctes.

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit le *commutant* de A par :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes. Montrer que : $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}[A]$.

2. Donner un exemple de matrice A pour laquelle l'inclusion $\mathbb{R}[A] \subset \mathcal{C}(A)$ est une inclusion stricte.

Exercice 14. On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que A et B sont semblables et en déduire la valeur de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.

Exercice 16. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer deux valeurs propres évidentes.

2. Est-elle diagonalisable ?

Exercice 17. Déterminer les z complexes pour lesquels la matrice suivante est diagonalisable :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto AM - MA$. Est-il diagonalisable ?

Exercice 19. Pour quelle(s) valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la matrice suivante n'est-elle pas diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} -2-x & 5+x & x \\ x & -2-x & -x \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20. Soit $a, b,$ et c trois réels non nuls. Étudier la diagonalisabilité de la matrice réelle :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ \frac{1}{a} & 0 & b \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où α, β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.

1. Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A.

2. Justifier que $2(\alpha+\beta)$ et $2(\alpha-\beta)$ sont aussi valeurs propres de A.

3. Préciser une base de vecteurs propres de A.

⚠ Dans cet exercice, on ne cherchera pas à calculer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 22. On se propose dans cet exercice de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

1. Montrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

2. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynômiale non identiquement nulle sur $\mathbb{C}$ et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $Q = R + xS$ soit inversible.

3. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Application: démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.